This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

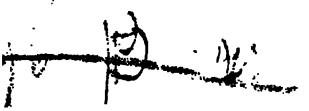
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641481 8



(Rio all

# DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR C. F. DE BICQUILLEY,
*GARDE-DU-CORPS DU ROI.*

R LIBRARY
-YORK.

*A TOUL,*
Chez JOSEPH CAREZ, Imprimeur-Libraire;
*Et ſe vend à PARIS,*
Chez la VEUVE DESAINT Junior, Libraire,
Quai des Auguſtins, près la rue Dauphine.

M. DCC. LXXXIII.
*AVEC PRIVILÉGE DU ROI.*

ПЕРША
МІСЬКА
ВІЛЬНА

# PRÉFACE.

L'ANALYSE & la Géométrie ſont reconnues pour les ſeuls guides qui puiſſent nous conduire ſûrement à la vérité; l'application qui en a été faite de nos jours à divers objets des connoiſſances humaines, a conſidérablement affoibli le regne de l'opinion : les ſciences exactes ont ſuccédé aux ſpéculations vagues, & quelques vérités certaines à une multitude de préjugés aveugles & d'ingénieuſes erreurs. Il y a lieu d'eſpérer que le Génie ne s'arrêtera pas dans ſa courſe, & que la méthode du calcul pourra s'étendre un jour aux objets qui nous en paroiſſent le moins ſuſceptibles, & ſur leſquels il nous importe le plus d'acquérir des notions aſſurées. Les épreuves tentées ſans ſuccès ne prouvent que la difficulté du projet; elles peuvent même ouvrir la voie à des efforts plus heureux, en éclairant les écueils qui ont cauſé les premiers naufrages.

Nous ne pouvons toutefois nous diſſimuler que la faculté humaine a des bornes qui lui ſont aſſignées par la nature; & qu'il eſt des objets, même d'une importance majeure, ſur lequels nous ſerons à jamais réduits au doute & à la ſeule vraiſemblance : mais la vraiſemblance, ou la probabilité eſt ſuſceptible de plus & de moins; elle a toutes les qualités qui caractériſent la grandeur; des rapports l'égalité & d'inégalité, des termes de *Maximum* & de *Minimum*, qui ſont la certitude abſolue d'une

part, & l'impoſſibilité reconnue d'autre : elle eſt donc du reſſort de la Géométrie, & ſa quantité peut être évaluée par le calcul.

La théorie des Probabilités ébauchée par des Géometres célebres m'a paru ſuſceptible d'être approfondie, & de faire partie de l'enſeignement élémentaire : j'ai penſé qu'un traité ne ſeroit point indigne d'être offert au public, qui pourroit enrichir de nouvelles vérités cette matiere intéreſſante, & la mettre à la portée du plus grand nombre des lecteurs.

Ce livre eſt diviſé en ſept chapitres : Dans le premier, les principes fondamentaux ſont précédés de définitions exactes du *certain*, du *poſſible* & de l'*impoſſible*, du *probable* & autres expreſſions de même eſpece plus fréquemment employées que bien conçues. Les trois ſuivants renferment une théorie analytique de la plus grande généralité, dans laquelle j'ai tâché de réunir la méthode, la briéveté & la clarté ; appliquant chaque propoſition à quelques exemples qui puiſſent à-la-fois éclaircir le principe & en indiquer les uſages.

Le cinquieme chapitre montre, par des exemples particuliers, l'application qui peut ſe faire de la théorie établie par les précédents, pour réſoudre les queſtions relatives à la plupart des jeux ; & la maniere d'appliquer à la recherche des probabilités les principes de la géométrie élémentaire ou tranſcendante, lorſque les queſtions pro-

posées en sont susceptibles. Le sixieme chapitre établit démonstrativement la maniere de suppléer à l'analyse par l'expérience, dans la recherche des probabilités, lorsque les questions proposées ne sont pas de nature à être soumises à un calcul exact. Le septieme est un essai sur le moyen d'estimer l'influence que peuvent avoir sur la probabilité des faits, les témoignages rendus pour ou contre ces faits.

Je suis extrêmement éloigné de prétendre avoir porté la connoissance des probabilités au degré de perfection où le génie & l'expérience pourront l'élever un jour; mais quoique les essais d'un amateur ne puissent entrer en comparaison avec les chefs-d'œuvre des maîtres; on ne jugera pas mon travail inutile, si j'ai fait quelques pas dans la carriere & concouru au progrès de l'art de conjecturer, & d'assujettir l'incertitude à des regles certaines.

## FAUTES A CORRIGER.

PAGE 2, §. *III*, *ligne* 2, états des choses, *lisez* états de choses.
*Page* 6, §. *XI*, *ligne* 8, 1 : 6. *lisez* 1 : 5.
*Page* 11, §. *XXV*, *dans la derniere accolade*, *mettez le trait qui est entre le* p & *l's*, *entre le* q & *le* p.
*Page* 73, §. *XCIV*, *ligne* 9, tons, *lisez* tous.
*Page* 135, *ligne* 8, proportions, *lisez* propositions.
*Page* 151, §. *CLXIX*, *ligne* 5, $\frac{a}{b}$ exprimera, *lisez* $\frac{b}{a}$ exprimera.

## *PRIVILÉGE DU ROI.*

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenants civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le ſieur CAREZ, Imprimeur-Libraire à Toul, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage intitulé : *Du Calcul des Probabilités ;* s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Permiſſion pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de cinq années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance. A LA CHARGE que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres ; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglements de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, & à l'Arrêt de notre Conſeil du 30 Août 1777, à peine de déchéance de la préſente Permiſſion ; qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur HUE DE MIROMÉNIL, Commandeur de nos Ordres ; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre. un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit Sieur HUE DE MIROMÉNIL : le tout à peine de nullité des Préſentes : DU CONTENU deſquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayants-cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS qu'à la copie

des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi ſoit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris, le douzieme jour du mois de Juin, l'an de grace mil ſept cent quatre-vingt-deux; & de notre Regne le neuvieme.

*PAR LE ROI EN SON CONSEIL.*

LE BEGUE.

---

*Regiſtré ſur le Regiſtre XXI de la Chambre royale & ſyndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 2678, fol. 708; conformément aux diſpoſitions énoncées dans la préſente Permiſſion; & à la charge de remettre à ladite Chambre les huit exemplaires preſcrits par l'art. CVIII du Réglement de 1723. A Paris, ce 14 juin mil ſept cent quatre-vingt-deux.* *Signé*, LE CLERC, *Syndic.*

---

*Regiſtré ſur le premier Regiſtre de la Chambre ſyndicale, N°. 236 & folio 49, verſo & recto 50, par moi ſyndic ſouſſigné, conformément à l'Arrêt du Conſeil du 30 août mil ſept cent ſoixante-dix-ſept; à la charge par le Sr. dit Carez de ne point expoſer d'exemplaire, ni en vendre, qu'il n'ait été fourni trois exemplaires voulus par les Réglements. A Nanci, ce trente-un octobre mil ſept cent quatre-vingt-deux.*

*Signé*, F. MESSIN, *Syndic.*

---

*J'ai lu, par ordre de M. le Garde des Sceaux, le préſent Manuſcrit intitulé:* Du Calcul des Probabilités. *Je n'y ai rien trouvé qui pût en empêcher l'impreſſion. Nanci, 18 Avril 1782.*

C. F. CHASSEL,
*Cenſeur Royal.*

## II.

Il est d'autres mouvements, actions, ou états de choſes dont nous ne ſommes pas en état d'aſſigner avec certitude les réſultats, conſéquences, ou effets : ces ſortes de réſultats, conſéquences, ou effets ſe nomment *Hazards*.

## III.

Entre les divers mouvements, actions, ou états des choſes dont nous ne ſommes pas en état d'aſſigner avec certitude la conſéquence ou l'effet, il en eſt auxquels nous ſommes en état d'aſſigner divers réſultats que nous nommons *Poſſibles*, entre leſquels nous ſommes aſſurés que l'effet ignoré ſe trouve, & hors deſquels nous ſommes également aſſurés que cet effet ne ſe trouve point.

Pour rendre ceci ſenſible par un exemple, ſuppoſons que Pierre agite dans un cornet deux dés à jouer ordinaires pour les projetter aveuglément ſur une table : j'ignore le réſultat de cet acte ; c'eſt-à-dire, le point qui ſera amené par Pierre : mais je ſais qu'il y a 36 réſultats que je nomme poſſibles, parmi leſquels je ſuis certain que ce point ſe trouve, & hors deſquels je ſuis auſſi certain que ce point ne ſe trouve pas; car le dé *A* peut amener ſix points différents ; & à chaque point amené par le dé *A*, le dé *B* peut amener ſix points différents : d'où je vois que le jet de deux dés à jouer ordinaires a 6 fois 6 ou 36 réſultats poſſibles, & qui ſont les ſeuls poſſibles.

## IV.

J'appelle deux ou pluſieurs réſultats *également poſſibles*, lorſqu'il n'y a aucune raiſon qui me faſſe eſpérer l'événement de l'un plus que l'événement de l'autre.

# DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

## CHAPITRE I.

### *Définitions, Notions, & Principes fondamentaux.*

#### §. I.

PARMI les divers mouvements, actions, ou états de choſes qui ſont ſous nos yeux, il en eſt dont nous ſommes en état d'aſſigner avec certitude le réſultat, la conſéquence ou l'effet; ſoit d'après des expériences multipliées d'autres mouvements, actions, ou états de choſes ſemblables; ſoit d'après une connoiſſance raiſonnée des loix qui les dirigent: ces effets, conſéquences, ou réſultats ſe nomment *Certains*.

des *Chances* dont ces hazards font partie ; il faudra toujours avoir attention à ce que les réſultats dont on fera l'énumération ſoient tous également poſſibles.

## VII.

On peut conclure des définitions ci-deſſus, qu'il n'y a point de hazard abſolu ; que ce mot eſt relatif à l'ignorance de celui qui l'emploie : & comme tout ſe meut dans la nature ſuivant des loix conſtantes & des forces données qui déterminent le réſultat de tout acte, mouvement, ou état de choſes ; il n'y auroit point de hazard, & tout ſeroit certain pour l'être intelligent qui connoîtroit parfaitement ces loix.

On peut dire la même choſe de la Poſſibilité, qui n'eſt point une qualité intrinſeque aux faits appellés poſſibles, mais ſeulement l'expreſſion de l'ignorance où nous ſommes ſi ces faits ont exiſté ou n'ont pas exiſté, s'ils exiſtent ou s'ils n'exiſtent pas, s'ils exiſteront ou s'ils n'exiſteront pas. En attachant à l'idée de la poſſibilité d'un fait celle d'une cauſe capable de le faire exiſter, on tomberoit dans une erreur manifeſte ; car une véritable cauſe ne peut exiſter ſans ſon effet, & dans cette ſuppoſition, il n'y auroit rien de poſſible que ce qui exiſte réellement.

## VIII.

Nous nous déterminons fréquemment dans la conduite de la vie ſur la ſuppoſition de faits ou événements dont nous ne ſommes pas en état d'affirmer la réalité avec certitude, & qui relativement à nous ſont ſeulement poſſibles : la ſuppoſition que nous faiſons que ces faits ont exiſté, qu'ils exiſtent, ou qu'ils exiſteront, ſe nomme *Préſomption* ou *Conjecture* ; ainſi préſumer ou conjecturer,

eſt ſuppoſer réel un fait qui relativement à nous n'eſt que poſſible, au riſque de nous tromper ſi la ſuppoſition ſe trouve fauſſe, & de manquer le but que nous nous ſommes propoſé en la faiſant.

## IX.

Un *Pari* ou *Gageure* eſt un contrat par lequel deux parties engagent chacune reſpectivement une ſomme d'argent déterminée, l'une à l'exiſtence, l'autre à la non-exiſtence d'un événement poſſible ſpécifié.

Par exemple: Si Pierre agitant dans un cornet deux dés à jouer, pour les jetter ſur une table, s'engage à payer un écu à Paul, au cas où il amèneroit Doublet: & que Paul s'engage réciproquement à payer 15 l. à Pierre, s'il amene un point ſimple: cette convention eſt un pari.

## X.

La *Probabilité* d'un hazard eſt le rapport du nombre des chances qui donnent ce hazard, au nombre total des chances dont ce même hazard fait partie.

Par exemple: Dans le jet de deux dés à jouer ordinaires:

La probabilité du point 12 eſt $\frac{1}{36}$:

Celle du point 11 eſt $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$:

Celle du point 10, $\frac{3}{36}$, ou $\frac{1}{12}$:

Celle du point 9, $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$:

Celle du point 8, $\frac{5}{36}$: Celle du point 7, $\frac{6}{36}$; ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Quine $\frac{1}{36}$: Celle de 5 & 4, $\frac{2}{36}$, ou $\frac{1}{18}$:

Celle de Doublet, $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Point-ſimple, $\frac{30}{36}$, ou $\frac{5}{6}$:

Parce que dans les 36 chances dépendantes du jet des deux dés, il y en a 1 qui donne le point 12; 2 qui donnent 11; 3 qui donnent 10; 4 qui donnent 9; 5 qui donnent 8; 6 qui donnent 7; 1 qui donne Quine; 2 qui donnent 5 & 4; 6 qui donnent Doublet; & 30 qui donnent Point-ſimple.

## XI.

Il ſuit des Définitions précédentes, que les Probabilités des divers hazards dépendants d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, ſont entre elles comme les nombres de chances qui les donnent :

*Par exemple :* Dans le jet de deux dés, la probabilité du Doublet eſt à celle du point ſimple, comme 6 eſt à 30, ou :: 1 : 6.

## XII.

En général : ſoit $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard: cette probabilité devient d'autant $\left\{\begin{array}{l}\text{plus grande}\\\text{moindre}\end{array}\right.$, que $n$ $\left\{\begin{array}{l}\text{augmente}\\\text{diminue}\end{array}\right.$, le dénominateur $m$ reſtant le même ; & ſi $n = m$, ou $\frac{n}{m} = 1$, l'événement eſt certain ; parce que dans ce cas, toutes les chances donnent l'événement : & ſi $n = o$, ou $\frac{n}{m} = o$, l'événement eſt impoſſible, ou ce qui eſt de même, la non-exiſtence de cet événement eſt certaine.

## XIII.

Il ſuit de-là que la probabilité ne peut jamais être plus grande que l'unité, ni moindre que $o$;

c'eſt-à-dire, négative : mais qu'elle peut paſſer par toutes les valeurs & les degrés de la grandeur, intermédiaires entre 0 & 1.

## XIV.

NOMMANT toujours $\frac{n}{m}$, la probabilité d'un hazard, $\frac{m-n}{m}$ eſt la probabilité contraire ; c'eſt-à-dire, la probabilité que ce hazard n'aura pas lieu : ce qui eſt évident ; car $n$ repréſentant le nombre des chances qui donnent ce hazard, $m-n$ eſt viſiblement le nombre des chances qui ne le donnent point.

## XV.

LA probabilité d'un hazard quelconque étant ajoutée à la probabilité contraire, donne toujours l'unité pour ſomme ; car $\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} = 1$ ; ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſqu'il eſt toujours certain qu'un hazard quelconque arrivera ou n'arrivera pas.

## XVI.

UNE ſorte de mouvement ou d'action qui a pluſieurs réſultats poſſibles, peut être réitérée deux, trois, quatre, ou un plus grand nombre de fois. Nous appellerons *Épreuves* chacune de ces répétitions.

Par exemple : Si dans un ſac qui renferme 90 boules mêlées & marquées chacune d'un numéro différent, telles que celles qu'on emploie dans le jeu de Loto, je prends aveuglément & ſans choix cinq de ces boules, les remettant enſuite dans le ſac, & que je réitere pluſieurs fois cette action ; ces répétitions ſe nommeront *Épreuves*.

## XVII.

LA probabilité d'un fait eſt auſſi celle de la propoſition qui affirme ce fait : de maniere qu'un fait & la propoſition qui en affirme l'exiſtence, ſont plus ou moins probables, ou croyables, ou vraiſemblables, ſelon que le rapport du nombre des chances qui donnent ce fait au nombre total des chances dont il fait partie, s'approche ou s'éloigne plus de l'unité. Il faut toutefois ſe ſouvenir que la vérité & la fauſſeté des faits & des propoſitions qui les affirment ne ſont néceſſairement déterminées par la probabilité, que dans les ſeuls cas où la probabilité égale o ou 1 ; hors de là, la probabilité ne conclut rien à la rigueur ſur la réalité des événements, & le moins probable eſt quelquefois celui qui arrive : il eſt cependant certain que la fréquence des retours des mêmes faits dans une multitude d'épreuves, eſt à peu près proportionnelle à la probabilité de ces faits ; que les conjectures nous expoſent d'autant moins à l'erreur, & nous trompent d'autant plus rarement que les faits préſumés ſont plus probables.

## XVIII.

ON nomme *Pari équitable*, le pari dans lequel les miſes ou ſommes engagées par les Parieurs, ſont entr'elles comme les probabilités des hazards à la réalité deſquels ces ſommes ſont engagées.

Ainſi, ſuppoſant que Pierre parie une ſomme $s$ pour un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$ ; la miſe de Paul qui parie que cet événement n'aura pas lieu, doit, pour que le pari ſoit équitable, être $s \cdot \frac{m-n}{n}$ ; car nommant $x$ la miſe de Paul, on aura cette proportion : la probabilité du hazard pour le-

quel Pierre parie, eſt à la probabilité du hazard pour lequel Paul parie, comme la miſe de Pierre eſt à la miſe de Paul : ou ce qui eſt de même, $\frac{n}{m} : \frac{m-n}{m} :: s : x$ ; d'où l'on déduit $x = s \cdot \frac{m-n}{n}$.

## XIX.

Dans le cas du pari équitable, la miſe d'un des parieurs, & la probabilité d'un des hazards étant données, on peut en déduire aiſément la miſe de l'autre parieur, & la probabilité de l'autre hazard. Ainſi, ſi la probabilité du hazard pour lequel Pierre parie eſt $\frac{1}{6}$, & la miſe de Paul 15 l. ; la probabilité de l'événement pour lequel Paul parie ſera $\frac{5}{6}$, & la miſe de Pierre 3 l.

## XX.

Dans un pari équitable ; ſi la probabilité de chaque hazard eſt $\frac{1}{2}$, les miſes doivent être égales ; & réciproquement ſi la probabilité eſt $\frac{1}{2}$, & les miſes égales, le pari eſt équitable.

## XXI.

Remarquez que l'équité d'un pari ſuppoſe que les probabilités des hazards qui ſont l'objet du pari, ſont également évaluées par les parieurs : autrement l'équité ſeroit détruite, même au moral ; & elle le ſeroit au plus haut point, ſi l'un des parieurs étoit certain de l'événement pour lequel il parie.

## XXII.

Remarquez encore que cette équité numérique

des paris emporte rarement égalité d'avantages & de déſavantages phyſiques aux parieurs ; parce que les avantages & déſavantages phyſiques attachés à tels gains ou à tels pertes, ſont, dans la condition humaine, rarement proportionnels aux ſommes gagnées ou perdues. Un homme, par exemple, dont la fortune ſe borneroit à 10000 l. qui ſuffiroient à tous ſes beſoins, joueroit avec un extrême déſavantage, quoiqu'à jeu égal, cette ſomme contre un millionnaire pour qui le gain ou la perte de cette ſomme ſont preſque de nulle conſéquence, vu qu'il ne peut ſe trouver compenſation de commodité & d'incommodité entre l'acquiſition du ſuperflu & la perte du néceſſaire ; le pari ne pourroit donc devenir équitable, dans ce ſens, que dans le cas tout au plus où les parieurs ſeroient dans des poſitions de fortunes égales, & où leur bien-être ſeroit indépendant des ſommes engagées au pari.

## XXIII.

On nomme Probabilité compoſée celle qui eſt le produit de pluſieurs autres probabilités : ainſi la probabilité $\frac{nqsu}{mprt}$ eſt compoſée des probabilités $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$.

## XXIV.

*Théoreme.* Deux actes, mouvements ou états de choſes différents étant donnés ; du premier, deſquels dépend un hazard, dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, & du ſecond, deſquels dépend un hazard dont la probabilité eſt $\frac{q}{p}$ ; je dis que la probabilité que

ces hazards arriveront tous deux eſt compoſée des probabilités de ces deux hazards, c'eſt-à-dire, que cette probabilité eſt $\frac{nq}{mp}$.

*Démonst.* 1°. Chacune des $m$ chances dont le premier hazard fait partie, peut arriver avec chacune des $p$ chances dont le ſecond hazard fait partie; ainſi le nombre des chances, dont le concours des deux hazards fait partie, eſt $mp$. 2°. Chacune des $n$ chances qui donnent le premier hazard peut arriver avec chacune des $q$ chances qui donnent le ſecond hazard : ainſi le nombre des chances qui donnent à la fois les deux hazards, eſt $nq$; donc la probabilité que les deux hazards arriveront, eſt $\frac{nq}{mp}$. (*X.*) *C. Q. F. D.*

## XXV.

*Coroll. I.* Étant donnés 3, 4, 5, ou un plus grand nombre d'actes, mouvements ou états de choſes différents, du

$\left\{\begin{array}{l}1^{er}.\\2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\\ldots..\end{array}\right.$ deſquels dépend un hazard dont la probabilité eſt

$\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{m}\\\frac{q}{p}\\\frac{s}{r}\\\frac{u}{t}\\\ldots.\end{array}\right.$ ; Je dis que la probabilité du concours de tous ces hazards eſt compoſée de toutes leurs

probabilités particulieres : c'eſt-à-dire, qu'elle eſt $\frac{nqsu....}{mprt....}$.

Car la probabilité du concours des deux premiers hazards eſt, comme on vient de voir, $\frac{nq}{mp}$ ; ainſi la probabilité du hazard naiſſant du concours des deux premiers hazards, & la probabilité du troiſieme hazard, c'eſt-à-dire, $\frac{nq}{mp}$ & $\frac{s}{r}$ ſont les deux probabilités compoſantes de celle du concours des trois premiers hazards, qui par conſéquent ſera $\frac{nqs}{mpr}$ : on prouvera de même que la probabilité que le hazard formé par le concours des trois premiers hazards, & le quatrieme hazard arriveront eſt $\frac{nqs}{mpr} \cdot \frac{u}{t}$ ou $\frac{nqsu}{mprt}$; ainſi de ſuite.

## XXVI.

*COROLL. II.* Étant donné un nombre $N$, d'actes mouvements, ou états de choſes ſemblables, deſquels dépendent divers hazards dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ .... au nombre $N$ : la probabilité que le

$\left\{\begin{array}{l}1^{er.}\\2^{e.}\\3^{e.}\\\ldots\end{array}\right.$ de ces actes amenera le hazard dont la probabilité eſt $\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{m}\\\frac{p}{m}\\\frac{q}{m}\\\ldots.\end{array}\right.$, eſt $\frac{npq....}{m^N}$ :

& ſi $n=p=q=\ldots\ldots$, la probabilité du concours de tous ces hazards eſt $\left(\frac{n}{m}\right)^N$.

## XXVII.

*Exemples.* Pierre, Jacques & Jean jettent chacun ſur une table deux dés à jouer ordinaires : la probabilité que Pierre amenera un Doublet, Jacques un Point ſimple, & Jean le Point 7, eſt $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ou $\frac{5}{216}$.

Je jette quatre fois de ſuite ſur une table deux dés à jouer ordinaires; la probabilité que j'amenerai toutes les quatre fois un Doublet, eſt $\frac{1}{64}$ ou $\frac{1}{1296}$: celle d'amener toutes les quatre fois Sonnet, eſt $\frac{1}{364}$ ou $\frac{1}{1679616}$.

## XXVIII.

Les actes, mouvements ou états de choſes deſquels dépendent les hazards dont on cherche la probabilité, ſont nommés les cauſes ou les ſignes de ces hazards, ſelon qu'ils peuvent être préſumés ou les produire ou les accompagner : au premier cas, les hazards ſe nomment *Effets*, au ſecond cas, ils ſe nomment *choſes ſignifiées*. Dans l'un & l'autre cas, la certitude de l'exiſtence de la cauſe ou du ſigne peut ſeule laiſſer à l'effet ou la choſe ſignifiée le degré de probabilité qui lui eſt propre : ainſi, la probabilité que Pierre amenera Sonnet, eſt $\frac{1}{36}$, que dans le cas où il eſt certain que Pierre jettera deux dés à jouer ſur une table : & la probabilité que Pierre amenera Sonnet, n'eſt $\frac{1}{6}$, que dans le cas où il eſt certain que Pierre amenera

ſomme des premiers nombres ordinaux pris au nombre $n$, de l'ordre indiqué par $m-1$.

*Par Ex.* le vingtieme nombre triangulaire eſt égal à la ſomme des vingt premiers nombres naturels ; le ſeptieme nombre de l'ordre cinquieme eſt égal à la ſomme des ſept premiers nombres pyramidaux, ainſi des autres.

## XXXII.

*REMARQUE I.* Un nombre ordinal, dont l'ordre eſt marqué par $m$, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par $n$, eſt égal au nombre ordinal, dont l'ordre eſt marqué par $n$, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par $m$.

*Par Ex.* Le ſeptieme nombre triangulaire eſt égal au troiſieme nombre de l'ordre ſeptieme, le troiſieme nombre pyramidal eſt égal au quatrieme nombre triangulaire, & ainſi des autres.

## XXXIII.

*REMARQUE II.* Un nombre

$$\left\{\begin{array}{l}1^{er}.\\2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\\ldots..\end{array}\right\} \text{ du rang } n, \text{ eſt au nombre } \left\{\begin{array}{l}2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\5^{e}.\\\ldots.\end{array}\right\} \text{ du même}$$

$$\text{rang, comme } \left\{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4.\\\ldots.\end{array}\right\} \text{ eſt à } \left\{\begin{array}{l}n\\n+1\\n+2\\n+3\\\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Ainſi de ſuite, & en général :

Le nombre ordinal de l'ordre marqué par $m$, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par $n$, eſt au

au nombre ordinal dont l'ordre eſt marqué par $m+1$, & dont le rang dans ſa ſuite eſt auſſi marqué par $n$, comme $m : \overline{n+m-1}$.

## XXXIV.

*PROBLÊME I.* Trouver l'expreſſion générale en $m$ & $n$ du nombre ordinal de l'ordre exprimé par $m$, & dont le rang dans la ſuite eſt exprimé par $n$.

*SOLUTION.* Nommant

$\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right.$ le nombre $\left\{\begin{matrix} \text{naturel} \\ \text{triangulaire} \\ \text{pyramidal} \\ \text{cinquieme} \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$ du rang marqué

par $n$ ; on a (XXXIII.)

$a : b :: 2 : \overline{n+1}$ ; mais $a = n$ ; donc $b = \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$ ;

$b$ ou $\frac{n.\overline{n+1}}{1.2} : c :: 3 : \overline{n+2}$ ; donc $c = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$ ;

$c$ ou $\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} : d :: 4 : \overline{n+3}$ ; donc $d = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}$ ; ainſi de ſuite : d'où l'on voit qu'en général le nombre ordinal de l'ordre $m$ & du rang $n$, eſt $\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{m+n-3}.\overline{m+n-2}}{1.2.3.4.5.\ldots\ldots.\overline{m-2}.\overline{m-1}}$

ou ce qui eſt de même ( XXXII. )

$\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\ldots\ldots.\overline{m+n-3}.\overline{m+n-2}}{1.2.3.4.5.6.\ldots.\overline{n-2}.\overline{n-1}}$ C. Q. F. T.

## XXXV.

*COROLL.* La ſomme des premiers nombres ordinaux de l'ordre $m$, pris au nombre $n$, eſt

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.....\overline{n+m-1}}{1.2.....\overline{m-1}.m}; \text{ (XXXI.)}$$

*Par ex.* La ſomme des quatre premiers nombres triangulaires eſt $\frac{4.5.6}{1.2.3}$, ou 20 : la ſomme des 25 premiers nombres de l'ordre huitieme, eſt

$\frac{25.26.27.....31.32}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ ou 10518300.

la ſomme des treize premiers nombres de l'ordre douzieme, eſt $\frac{13.14.15....24}{1.2.....11.12}$ ou 2704156.

## XXXVI.

*REMARQUE III.* Si l'on diviſe ſucceſſivement l'unité par

$$\left\{\begin{array}{lll} 1-x, & \text{ou} & \frac{1}{1-x}^{1} \\ 1-2x+x^2, & \text{ou} & \frac{1}{1-x}^{2} \\ 1-3x+3x^2-x^3, & \text{ou} & \frac{1}{1-x}^{3} \\ & & \frac{1}{1-x}^{4} \\ & & \cdots\cdots \\ & & \frac{1}{1-x}^{m} \end{array}\right.$$

; l'on trouvera pour quotient la ſuite infinie

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c. \\ 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. \\ 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \&c. \\ 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c. \end{array}\right.$$

d'où l'on voit qu'en général la ſuite infinie

$$1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c.$$

$$= \frac{1}{\overline{1-x}^m}.$$ ou autrement

ſi on multiplioit par une quantité $x$ moindre que l'unité, tous les termes à l'infini de la ſuite des nombres ordinaux de l'ordre $m$, ſavoir chacun des termes par la puiſſance de $x$ du dégré indiqué par le rang que ce terme a dans la ſuite, moins 1; la ſomme de tous ces termes ſeroit le quotient de l'unité diviſée par la puiſſance du degré $m$ de la quantité $1 - x$.

## XXXVII.

*PROBLEME II.* Trouver l'expreſſion générale en $m$, $n$, p, de la ſomme des premiers nombres ordinaux de l'ordre $m$, pris au nombre $n$, & élevés chacun à la puiſſance du degré marqué par $p + 1$.

*Sol.* Pour abréger les calculs, j'exprimerai, par

$$\left\{\begin{array}{l} \int n \\ \int n^2 \\ \int n^3 \\ \cdots\cdots \\ \int n^{p+1} \end{array}\right.$$ la ſomme des $n$ premiers nombres naturels

élevés chacun à la puiſſance du degré

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdots\cdots \\ \overline{p+1} \end{array}\right. ; \text{ \& par conſéquent, par}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^2,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^3,\ \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^1, \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2, \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^3, \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^1, \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^2, \&c. \\ \&c. \end{array}\right.$$

la ſomme des $n$ premiers nombres

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Triangulaires,} \\ \text{Pyramidaux, élevés chacun à la puiſſance} \\ \text{Cinquiemes,} \\ \text{\&c.} \end{array}\right.$$

1e, 2e, 3e, &c. Cela poſé :

1°. $\int n = \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$, (XXXIV & XXXV).

$\int \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$ ou $\int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{2}$ ou $\int \frac{n^2}{2} + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2.2}$

$= \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$ ; donc

2°. $\int n^2 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3}$ ;

$\int \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$ ou $\int \frac{n^3}{6} + \int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{3}$ ou

$$\int \frac{n^3}{6} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{6} - \frac{n.\overline{n+1}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}}{6} =$$

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ ;\ \text{donc}$$

$$3^{o}.\ \int n^3 = \frac{n.\overline{n+1}}{2} - 3\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3} +$$

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4}.$$

On trouvera en procédant de même

$$4^{o}.\ \int n^4 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + 7\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3}$$

$$-6\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+4}}{5};$$

ainſi de ſuite. Et faiſant pour abréger

$$a = \frac{n.\overline{n+1}}{2},$$

$$b = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3},$$

$$c = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4},$$

$$d = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}{5},$$

ainſi de ſuite : on trouvera ſucceſſivement

$$\int n = +a,$$
$$\int n^2 = -a + b,$$
$$\int n^3 = +a - 3b + c,$$
$$\int n^4 = -a + 7b - 6c + d,$$
$$\int n^5 = +a - 15b + 25c - 10d + e;$$

ainſi de ſuite : & en général

$$\int n^{p+1} = \pm\left\{a - \frac{2^p - 1}{1}\cdot b + \frac{3^p - 2\cdot 2^p + 1}{1\cdot 2}\,c - \frac{4^p - 3\cdot 3^p + 3\cdot 2^p - 1}{1.2.3}\cdot d + \frac{5^p - 4\cdot 4^p + 6\cdot 3^p - 4\cdot 2^p + 1}{1.2.3.4}\cdot e - \&c\right\}.$$

la loi de cette ſuite eſt viſible, elle doit être précédée du ſigne + ou du ſigne −, ſelon que l'expoſant p eſt pair ou impair; tous les termes poſtérieurs à celui dont le rang eſt marqué par $\overline{p+1}$ s'évanouiſſent.

On trouvera pareillement

$$\int \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} = \frac{b}{2};$$

$$\int \left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^2 = \frac{2b - 4c + d}{4};$$

$$\int \left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^3 = \frac{4b - 32c + 38d - 12e + f}{8}; \ldots\ldots$$

Et généralement $\int \left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^{p+1} =$

$$\frac{1}{1.2}\cdot\left\{b - \frac{3^p - 1}{1}c + \frac{6^p - 2.3^p + 1}{1.2}\cdot d - \frac{10^p - 3.6^p + 3.3^p - 1}{1.2.3}e + \frac{15^p - 4.10^p + 6.6^p - 4.3^p + 1}{1.2.3.4}\cdot f - \&c.\right\}$$

Suite dont la loi eſt viſible, & dans laquelle tous les termes poſtérieurs au $\overline{2p+1}^e$ s'évanouiſſent.

On trouvera de même

$$\int \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} = +\frac{c}{6}$$

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2 = -\frac{6c-18d+9e-f}{36} \ldots\ldots$$

Et généralement $\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^{p+1} =$

$$\pm\frac{1}{1.2.3}\cdot\left\{c-\frac{4^p-1}{1}d+\frac{10^p-2.4^p+1}{1.2}\cdot e-\right.$$

$$\left.\frac{20^p-3.10^p+3.4^p-1}{1.2.3}f+\&c.\right\}$$

le ſigne $+$ ou $-$ ſelon que p eſt pair ou impair.

En continuant à procéder de même, & faiſant pour abréger

$$m.\overline{m+1} = m^{\text{I}}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2} = m^{\text{II}}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3} = m^{\text{III}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m} = n^{\text{I}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+1} = n^{\text{II}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+2} = n^{\text{III}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+3} = n^{\text{IV}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$

ainſi de ſuite :

On trouvera en général

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m-2}}{1.2.3.\ldots.\overline{m-1}}\right)^{p+1} =$$

$$\pm\frac{1}{1.2.3.\ldots.\overline{m-1}}\times$$

$$\left\{1.\frac{n^{\text{I}}}{m}\right.$$

$$-\left(\frac{m^p}{1}-1\right).\frac{n^{\text{II}}}{\overline{1.m+1}}$$

$$+\left(\frac{m^{1\,p}}{1.2}-\frac{2m^{p}}{1}+1\right)\cdot\frac{n^{111}}{1.2.\overline{m+2}}$$

$$-\left(\frac{m^{11\,p}}{1.2.3}-\frac{3m^{1\,p}}{1.2}+\frac{3m^{p}}{1}-1\right)\cdot\frac{n^{1v}}{1.2.3.\overline{m+3}}$$

$$+\left(\frac{m^{111\,p}}{1.2.3.4}-\frac{4m^{11\,p}}{1.2.3}+\frac{6m^{1\,p}}{1.2}-\frac{4m^{p}}{1}+1\right)\cdot\frac{n^{v}}{1.2.3.4.\overline{m+4}}$$

$$-\ \&c.\ \Big\}.$$

Le Signe — précédent dans le cas seulement où $m$ est un nombre pair & p un nombre impair; il faut observer que tous les termes de cette suite, qui suivent celui du rang $\overline{m\,p-p+1}$, s'évanouissent.

On a donc l'expression générale en $m$, $n$, p de la somme des premiers nombres ordinaux de l'ordre $m$, pris au nombre $n$, & élevés chacun à la puissance du degré exprimé par $\overline{p+1}$; *C. Q. F. T.*

## XXXVIII.

*Avertissement.* Pour éviter les formules trop compliquées, soit par le grand nombre des termes dont elles peuvent être composées, soit par le grand nombre des facteurs qui composent ces différents termes, soit même par le grand nombre des suites, lorsque ces formules sont formées de plusieurs suites différentes; nous omettrons & remplacerons par quelques points les facteurs, termes & suites dont la loi sera visible, & qui seront faciles à suppléer.

*Par Ex.* $1.2.3.4.\ldots\ldots.24$
exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 24. inclusivement.

$$80.81.\ldots\ldots.\overline{80+m}$$
exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 80 jusques à $\overline{80+m}$ inclusivement.

$$1+2+3+\ldots\ldots+25$$

marquera la ſomme des 25 premiers nombres naturels :

$$+ 3 + 6 + \ldots\ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$$

a ſomme des $n$ premiers triangulaires :

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 1 \\ + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n \\ + 1 + 3 + 6 + \ldots\ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + m + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2} + \ldots + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+m-2}}{1.2\ldots\ldots\overline{m-1}} \end{array}$$

la ſomme des $n$ premiers nombres ordinaux des $m$ premiers ordres : ainſi des autres.

Sur quoi il faut obſerver que cette méthode a l'avantage de fixer d'une maniere générale & viſible le nombre des facteurs, termes & ſuites qui compoſent une quantité algébrique ; quoique ce nombre dépende de la valeur des lettres qui entrent dans la quantité, & varie au gré de cette valeur.

# CHAPITRE II.

## *De la Probabilité des Hazards qui ont lieu dans le concours ſimultané de pluſieurs Chances.*

### §. XXXIX.

IL PEUT ſe faire que ſur le nombre total $m$ de Chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné, il n'en doive arriver qu'une ſeule : il peut ſe faire auſſi qu'il doive arriver un certain nombre $p$ de ces chances.

Dans le premier cas, ſi on diſtingue une partie de ces $m$ chances; que le nombre des chances diſtinguées ſoit $n$, & qu'un hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'une quelconque des chances diſtinguées : la probabilité du hazard ſpécifié eſt $\frac{n}{m}$.

*Par Ex.* Si ſur le nombre total des 32 cartes qui compoſent un jeu de Piquet, on en doit tirer une aveuglément & ſans choix, & qu'on deſire que la carte tirée ſoit un Tréfle : les cartes diſtinguées ſont les Tréfles qui ſont au nombre de 8; & la probabilité du hazard deſiré eſt $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$.

Dans le 2e. cas : ſi l'on diſtingue une partie du nombre total des chances, que le nombre des chances diſtinguées ſoit $n$, & qu'un hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre $r$ des chances diſtinguées : *Par ex.* Si ſur les 32 cartes d'un jeu de Piquet,

en doit tirer 9 aveuglément, & qu'on deſire e dans les 9 cartes tirées il ſe trouve 5 Tréfles, ıs ſpécifier leſquels : alors la probabilité du ha-:d ſpécifié n'eſt plus $\frac{n}{m}$ ni $\frac{1}{4}$ ; l'objet de ce cha-re eſt de déterminer cette Probabilité.

## X L.

*THÉOREME I.* Nommant $m$ le nombre de chan-s dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de oſes donné, je dis qu'un nombre $p$ de ces chan-s peut arriver du nombre de manieres également ɔſſibles exprimé par $\frac{m.\overline{m-1}.\ldots\ldots.\overline{m-p+1}}{1.2.\ldots\ldots.p}$.

*Démonſt.* Repréſentant par $a$, $b$, $c$, $d$, $f$, &c. ı nombre $m$, les chances données :

Le nombre de manieres dont une ſeule de ces ıances peut arriver, eſt $m$ ou $\frac{m}{1}$ comme il eſt évid.

Le nombre des manieres dont deux des $m$ chan-s données peuvent arriver, eſt celui des termes : la table ſuivante :

$$\begin{array}{ccccc} a\,b & & & & \\ a\,c & b\,c & & & \\ a\,d & b\,d & c\,d & & \\ a\,f & b\,f & c\,f & d\,f & \\ \hline - & - & - & - & - \end{array}$$

ns laquelle le nombre des lettres eſt $m$ : or, il : viſible que le nombre de ces termes eſt $\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}$.

Le nombre des manieres dont trois des $m$ chan-s données peuvent arriver, eſt celui des termes la table ſuivante :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a b c | | | |
| a b d | a c d | | |
| a b f | a c f | a d f | |
| | b c d | | |
| | b c f | b d f | |
| | | c d f | |

dans laquelle le nombre des lettres eſt $m$ : or, il eſt viſible que le nombre de ces termes eſt $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$.

Ainſi de ſuite : & continuant à procéder de même, on trouvera généralement que le nombre des manieres également poſſibles dont un nombre $p$ des chances données peut arriver à la fois, eſt $\frac{m.m-1....m-p+1}{1.2.....p}$ *C. Q. F. D.*

## XLI.

*Ex.* Sur un jeu de Piquet de 32 cartes mêlées on en tire 15 aveuglément & ſans choix, & l'on demande de combien de manieres également poſſibles la ſomme des cartes tirées peut ſe trouver compoſée. Pour le trouver : dans l'expreſſion générale $\frac{m.....m-p+1}{1.2.....p}$ ; je ſubſtitue 32 à $m$, 15 à $p$, & elle devient $\frac{32....18}{1.2.....15} = 565722720$ qui eſt le nombre cherché.

## XLII.

REMARQ. I. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les $m$ chances en deux parts, dont l'une contiendroit un nombre $p$ de chances, & l'autre les $m-p$ chances reſtantes ; la ſolution ſeroit la même, comme il eſt évident, c'eſt-à-dire, que le nombre de manieres cherché ſeroit $\frac{m.....m-p+1}{1.2.....p}$ ou $\frac{m.....p+1}{1.2.....m-p}$ :

Ainſi, ſi l'on demande de combien de manieres on peut des 32 cartes du Piquet faire deux parts, une de 27 cartes, l'autre de 5, on trouvera pour le nombre cherché $\frac{32.....28}{1.2.3.4.5}$ ou $\frac{32.....6}{1.2.....27} = 201376$

## XLIII.

NOMMANT toujours $m$ le nombre total des chances; ſi un nombre $p$ de ces chances doit arriver à la fois; puis un nombre $p'$ des $m-p$ chances qui reſtent, arriver enſuite à la fois; je dis que cet effet peut avoir lieu du nombre de manieres exprimé par

$$\frac{\overline{.....m-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{\overline{m-p.....m-p-p'+1}}{1.2.....p'},$$

car le nombre des manieres dont les $p$ chances qui doivent d'abord arriver, peuvent arriver, eſt $\frac{\overline{.....m-p+1}}{1.2.....p}$; mais à chacune de ces manieres, les $p'$ chances qui doivent enſuite arriver peuvent arriver de $\frac{\overline{m-p...m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$ manieres; donc le nombre de manieres dont l'effet duquel il s'agit peut avoir lieu, eſt le produit de $\frac{\overline{m.....m-p+1}}{1.2.....p}$ par $\frac{\overline{m-p....m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$

*Par ex.* Si l'on demande de combien de manieres ſur un jeu de Piquet je puis prendre 12 cartes, & enſuite ſur les 20 cartes reſtantes en prendre 8: je ſubſtitue dans la formule ci-deſſus 32 à $m$; 12 à $p$; 8 à $p'$; & elle devient $\frac{32.....21}{1.2.....12} \cdot \frac{20.....13}{1.2.....8}$ = 284431240048oo qui eſt le nombre cherché.

## XLIV.

En continuant à procéder de même, on trouvera que $m$ étant le nombre total des chances, un nombre $p$ de ces chances doit d'abord arriver, puis un nombre $p'$ des $m-p$ chances qui restent, puis un nombre $p''$ d'entre les $m-p-p'$ chances qui restent, puis un nombre $p'''$ d'entre les $m-p-p'-p''$ chances qui restent, ainsi de suite; le nombre de manieres également possibles dont cet effet peut avoir lieu, est

$$\frac{\overline{m \ldots\ldots m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p} \cdot \frac{\overline{m-p \ldots\ldots m-p-p'+1}}{1.2\ldots\ldots p'} \cdot \frac{\overline{m-p-p' \ldots\ldots m-p-p'-p''+1}}{1.2\ldots\ldots p''} \times \ldots\ldots$$

## XLV.

Remarq. 2°. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les $m$ chances en plusieurs parts; la premiere contenant un nombre $p$, la 2.e un nombre $p'$, la 3.e un nombre $p''$, &c. ces chances; on trouveroit la formule ci-dessus pour le nombre cherché.

*Par ex.* Si l'on demande de combien de manieres les 32 cartes du Piquet peuvent être distribuées entre les 2 joueurs & le talon; ou ce qui est de même, partagées en 3 parts deux de 12, & l'autre de 8 cartes: on aura pour le nombre cherché

$$\frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 13}{1 \ldots 8} = 284431240048 00.$$

Si l'on demande de combien de manieres les 52 cartes du jeu complet peuvent être partagées entre les 4 joueurs au Wisk, ou ce qui est de même, distribuées en 4 parts, chacune de 13 cartes:

Dans la formule ci-dessus je substitue 52 à $m$, 13 à $p, p'$ & $p''$, & elle devient $\frac{52 \ldots\ldots 40}{1.2 \ldots\ldots 13} \times$

$\frac{9.....27}{2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13} = 85651261978511517978614400000.$

qui eſt le nombre cherché.

## XLVI.

*THÉOREME II.* Nommant $m$ le nombre des chances dont un hazard ſpécifié feroit partie s'il ne devoit arriver qu'une ſeule de ces chances : & ſuppoſant

1°. Qu'un nombre $p$ de ces chances doit certainement arriver :

2°. Que dans le nombre total des chances, on en diſtingue une partie, & que le nombre des chances diſtinguées ſoit $n$ :

3°. Que le hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre $r$ juſte d'entre les chances diſtinguées :

Je dis que la Probabilité du hazard ſpécifié, eſt

$$\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r} \cdot \frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}} \cdot \frac{m...\overline{m-p+1}}{1.2.....p}.$$

*DEMONST.* 1.° Sur le nombre $n$ des chances diſtinguées, il en peut arriver un nombre $r$ du nombre de manieres exprimé par $\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}$ ; (*XL.*) : mais à chacune de ces manieres, ſur le nombre $m-n$ des chances non diſtinguées, il en peut arriver un nombre $p-r$ de $\frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}}$ manieres : donc le nombre des manieres également poſſibles d'avoir le hazard ſpécifié, ou ce qui eſt de même, le nombre des chances qui donnent ce hazard dans la préſente hypotheſe, eſt

$$\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r} \cdot \frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}}$$

2.° Sur la totalité des $m$ chances ſuppoſées, il

peut en arriver un nombre $p$ du nombre de manieres exprimé par $\frac{m \ldots\ldots m-p+1}{1.2\ldots\ldots p}$ ; donc ce nombre est celui de tous les cas poſſibles, c'eſt-à-dire, le nombre total des chances dans la préſente hypotheſe.

Donc la Probabilité cherchée eſt ( $X$. )

$$\frac{n \ldots n-r+1}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \frac{m-n \ldots m-n-p+r+1}{1.2\ldots\ldots p-r} : \frac{m \ldots m-p+1}{1.2\ldots p}$$

Ç. Q. F. D.

## XLVII.

*Exemp.* Si ſur un jeu de Piquet on doit tirer aveuglément 9 cartes, & qu'on deſire que dans les 9 cartes tirées il ſe trouve 5 piques juſte, c. à. d. ni plus ni moins ; pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans la formule générale ci-deſſus, je fais $m = 32$; $n = 8$ ; $p = 9$ ; $5 = r$ ; & elle devient

$$\frac{8\ldots\ldots 4}{1.2\ldots\ldots 5} \cdot \frac{24\ldots\ldots 21}{1.2\ldots\ldots 4} \cdot \frac{32\ldots\ldots 24}{1.2\ldots\ldots 9} = \frac{12397}{584350} .$$

## XLVIII.

Si dans l'expreſſion générale

$$\frac{n \ldots\ldots n-r+1}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \frac{m-n \ldots m-n-p+r+1}{1.2\ldots\ldots p-r} : \frac{m \ldots m-p+1}{1.2\ldots\ldots p}$$

on fait $r = o$, elle devient

$$\frac{m-n\ldots\ldots m-n-p+1}{1.2\ldots\ldots p} \cdot \frac{m\ldots\ldots m-p+1}{1.2\ldots\ldots p}$$

qui eſt la probabilité qu'il n'arrivera aucune des chances diſtinguées.

## XLIX.

Si on retranche cette derniere expreſſion de l'unité, on aura

$1-\frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}}{1.2.....p} : \frac{\overline{m}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ pour la probabilité qu'il arrivera au moins une des chances distinguées : ( XIV. )

## L.

*EXEMP.* Si sur les 90 Numéros de la Lotterie Royale de France j'en prends 75, la probabilité que dans le tirage prochain il n'arrivera aucun des 75 numéros que j'ai pris se trouvera en substituant dans la formule $\frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}}{1.2.....p} : \frac{\overline{m}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ 90 à $m$, 75 à $n$, & 5 à $p$; & elle deviendra $\frac{15...11}{1.2...5} : \frac{90.....86}{1.2.....5} = \frac{1001}{14649756}$; qui est la probabilité cherchée; Et $1-\frac{1001}{14649756}$ ou $\frac{14648755}{14649756}$ sera la probabilité que dans le tirage prochain il arrivera au moins un des 75 Numéros que j'ai pris.

## L I.

Si dans l'expression générale on fait $r=n$; elle devient $\frac{\overline{m-r}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p-r} : \frac{\overline{m}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ qui est la probabilité que toutes les chances distinguées arriveront :

*Par ex.* Si je prends 3 numéros de la Lotterie Royale de France; pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront au prochain tirage, dans la formule ci-dessus je substitue 90 à $m$, 5 à $p$, 3 à $r$, & elle devient $\frac{87.86}{1.2} : \frac{90.....86}{1.2.....5} = \frac{1}{11748}$, qui est la probabilité cherchée.

## LII.

Si $n = p$, la formule générale devient $\frac{\overline{p \ldots p-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{\overline{m-p \ldots m-2p+r+1}}{1.2 \ldots\ldots p-r} : \frac{\overline{m \ldots\ldots m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$.

## LIII.

Si $r = p = n$ ; la formule générale devient $1 : \frac{\overline{m \ldots\ldots m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$ ou $\frac{1.2 \ldots\ldots p}{m \ldots\ldots m-p+1}$ ;

*Par ex.* Si je prends 5 des 90 numéros de la Loterie Royale de France : pour avoir la probabilité que mes 5 numéros arriveront au tirage prochain, dans l'expreſſion ci-deſſus je fais $90 = m$, $5 = p$, & elle devient $\frac{1.2 \ldots\ldots 5}{90 \ldots\ldots 86} = \frac{1}{43949268}$.

## LIV.

Si $p = r = 1$. La formule générale ſe réduit à $\frac{n}{m}$ ; ce qui eſt le cas où une ſeule des chances diſtinguées doit arriver.

## LV.

*PROBLÊME Ier.* Nommant $m$ le nombre des chances dont un hazard ſpécifié feroit partie s'il ne devoit arriver qu'une ſeule de ces chances : & ſuppoſant 1°. Qu'un nombre $p$ de ces chances doit certainement arriver. 2°. Que dans le nombre total des chances on en diſtingue une partie, & que le nombre des chances diſtinguées eſt $n$. 3°. Que le hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre $r$ au moins d'entre les $n$ chances diſtinguées :

Trouver la Probabilité du hazard ſpécifié.

*SOLUT.* 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée ; j'obſerve qu'il eſt compoſé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, ſavoir ; le nombre de toutes les manieres également poſſibles de l'arrivée du nombre juſte

$$\left\{\begin{array}{l} r \\ r+1 \\ r+2 \\ r+3 \\ \ldots\ldots \\ n-1 \\ n \end{array}\right.$$ d'entre les $n$ chances diſtinguées ; *c. à. d.* de

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r}}, \\ \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r}}{1.2 \ldots\ldots r+1} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+2}}{1.2 \ldots\ldots p-r-1}, \\ \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r-1}}{1.2 \ldots\ldots r+2} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+3}}{1.2 \ldots\ldots p-r-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p}}{1.2 \ldots\ldots p-n+1}, \\ 1 \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p-n}, \end{array}\right.$$

ou ce qui eſt de même : le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſuite compoſée de la ſomme de tous ces produits.

2°. Le Dénominateur de la Probabilité cherchée eſt, comme ci-deſſus, ( XLVI. ) $\dfrac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$ ;

donc la probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ \ldots\ldots\ \overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p-n} \\ + \\ n \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ \ldots\ldots\ \overline{m-p}}{1.2\ldots\ldots p-n+1} \\ + \\ \dfrac{n.\overline{n-1}}{1.2} \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ \ldots\ldots\ \overline{m-p-1}}{1.2\ldots\ldots p-n+2} \\ + \\ \dfrac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ \ldots\ldots\ \overline{m-p-2}}{1.2\ldots\ldots p-n+3} \\ + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \\ \dfrac{n\ldots\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\overline{r+1}} \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ \ldots\ldots\ \overline{m-p-n+r+2}}{1.2\ldots\ldots\ldots p-r-1} \\ + \\ \dfrac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \dfrac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p-n+r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots p-r} \end{array}\right\} \cdot \frac{m\ldots\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p}$$

*C. Q. F. T.*

## LVI.

*EXEMPLE. I.* Je ſuppoſe qu'on tire aveuglément & ſans choix 10 cartes ſur un jeu de Piquet de 32 cartes : je deſire que dans les 10 cartes tirées, il ſe trouve au moins 5 cœurs : pour avoir la probabilité du hazard deſiré ; dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 32$, $p = 10$, $n = 8$, $5 = r$, & elle devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \cdot \dfrac{24.23}{1.2} \\ + \\ \dfrac{8.}{1} \cdot \dfrac{24.23.22}{1.2.3} \\ + \\ \dfrac{8.7}{1.2} \cdot \dfrac{24.23.22.21}{1.2.3.4} \\ + \\ \dfrac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \dfrac{24\ldots\ldots20}{1.2.3.4.5} \end{array}\right\} \cdot \frac{32\ldots\ldots23}{1.2\ldots\ldots10} = \frac{5857}{140244}$$

qui eſt la probabilité cherchée.

## LVII.

*EXEMPLE II.* Sur les 90 Numéros de la Lotterie Royale de France, on en choisit 75 : je desire que dans le tirage prochain il arrive au moins 3 des numéros choisis : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans l'expression générale ci-dessus je fais $m=90$, $p=5$, $n=75$, $r=3$, & elle devient

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{75.....71}{1.2.3.4.5}\cdot 1 + \cdot \\ \frac{75.....72}{1.2.3.4}\cdot 15 + \\ \frac{75.74.73}{1.2.3}\cdot\frac{15.14}{1.2}\end{array}\right\}\cdot\frac{90.....86}{1.2.3.4.5}=\frac{14193755}{14649756}$$

qui est la probabilité cherchée.

## LVIII.

*PROBLÊME II.* Nommant toujours $m$ le nombre total des chances dont un hazard spécifié feroit partie s'il n'en devoit arriver qu'une seule : & supposant 1°. Qu'un nombre $p$ de ces chances doit arriver certainement : 2°. Que dans ce nombre total des chances on en distingue une partie ; & que le nombre des chances distinguées est $n$ ; 3°. Que le hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre $r$ au plus d'entre les $n$ chances distinguées :

Trouver la Probabilité du hazard spécifié.

*SOLUT.* 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée, j'observe qu'il est composé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, savoir :

Le nombre de toutes les manieres également possibles de l'arrivée du nombre juste

$$\left\{\begin{array}{l}r \\ r-1 \\ r-2 \\ \text{.....} \\ 1 \\ 0\end{array}\right.$$

d'entre les $n$ chances distinguées ; *c. à. d.*

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\ldots p-r},\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\ldots r-1}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots p-r+1},\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+3}}{1.2\ldots\ldots r-2}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r-1}}{1.2\ldots\ldots p-r+2},\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
n\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots\ldots p-1},\\[2ex]
1\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots\ldots p},
\end{array}\right.$$

ou ce qui eſt de même : le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſuite compoſée de la ſomme de tous ces produits.

2.° Le Dénominateur de la probabilité cherchée eſt comme ci-deſſus $\dfrac{n\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots p}$ ( XLVI. ) : donc la Probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{ll}
1\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots\ldots p} & +\\[2ex]
n\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots\ldots p-1} & +\\[2ex]
\dfrac{n.n-1}{1.2}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}}{1.2\ldots p-2} & +\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\ldots r-1}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots p-r+1} & +\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots p-r} & \}\cdot\dfrac{m\ldots\overline{m-r+1}}{1.2\ldots\ldots p}
\end{array}\right.$$

*C. Q. F. T.*

## LIX.

*Exemple I.* Je ſuppoſe qu'on tire au euglément

& ſans choix 10 cartes ſur un jeu de Piquet de 32 cartes : je deſire que dans les 10 cartes tirées, il ne ſe trouve que 4 cœurs au plus :

Pour avoir la probabilité du hazard deſiré ; dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 32$, $p = 10$, $n = 8$, $r = 4$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{24.....15}{1.2.....10} + 8 \cdot \frac{24.....16}{1.2.....9} + \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{24.....17}{1.2.....8} + \frac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \frac{24.....18}{1.2.....7} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{24.....19}{1.2.....6}\right) : \frac{32.....23}{1.2.....10} = \frac{134387}{140244}$$

qui eſt la Probabilité cherchée.

## L X.

*EXEMPLE II.* Sur les 90 numéros de la Lotterie Royale de France, on en choiſit 75 ; je deſire que dans le tirage prochain il n'arrive que 2 au plus des numéros choiſis ; pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 90$, $p = 5$, $n = 75$, $r = 2$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{15.....11}{1.2.3.4.5} + 75 \cdot \frac{15.....12}{1.2.3.4} + \frac{75.74}{1.2} \cdot \frac{15.14.13}{1.2.3}\right) : \frac{90.....86}{1.2.3.4.5} = \frac{456001}{14649756},$$

qui eſt la Probabilité cherchée.

# CHAPITRE III.

## *De la Probabilité des Hazards qui dérivent du concours ſucceſſif de pluſieurs Chances dans un ordre déterminé.*

### §. LXI.

NOUS ſuppoſerons encore dans ce chapitre, que, ſur le nombre total *m* des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, il en doive arriver ſucceſſivement & une à une un nombre *p*; que, dans ce nombre total des chances on en diſtingue une partie; & que le nombre des chances diſtinguées eſt *n*.

Mais il peut arriver deux cas différents:

Ou bien le hazard ſpécifié dépend de l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances diſtinguées, quelque ſoit l'ordre dans lequel elles arrivent: nous avons, dans le chapitre précédent, déterminé d'une maniere générale la probabilité du hazard ſpécifié dans cette hypotheſe.

En ſecond lieu: il peut ſe faire que le hazard ſpécifié conſiſte en l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances diſtinguées dans un ordre déterminé.

*Par ex.* Si ſur les 32 cartes du Piquet on en nomme 4 dans un ordre déterminé, tel que celui-ci

As de Pique 3^e^, Roi de Tréfle 5^e^, Dame de Cœur 7^e^, Valet de Carreau 10^e^.

Si enſuite on tire aveuglément 10 des 32 cartes données ; ſucceſſivement une à une ; & qu'on deſire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve au moins 2 de celles qu'on a nommées, dans la place qu'on leur a aſſignée : c'eſt-à-dire,

L'As de Pique la 3^e, & le Roi de Tréfle la 5^e ; ou bien

L'As de Pique la 3^e, & la Dame de Cœur la 7^e ; ou bien

L'As de Pique la 3^e, & le Valet de Carreau la 10^e ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5^e, & la Dame de Cœur la 7^e ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5^e, & le Valet de Carreau la 10^e ; ou bien

La Dame de Cœur la 7^e, & le Valet de Carreau la 10^e.

Il s'agit de trouver dans ces ſortes d'hypotheſes la probabilité du hazard deſiré, ce qui ſera la matiere de ce troiſieme Chapitre.

## LXII.

*THÉORÊME.* Nommant $m$ le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné ; je dis qu'un nombre $p$ de ces chances peut arriver ſucceſſivement une à une du nombre de manieres également poſſibles exprimé par $\overline{m \cdot m-1 \ldots\ldots m-p+1}$

*DÉM.* Repréſentant les chances données par $a$, $b$, $c$, $d$, $f$, &c. au nombre $m$ ; il eſt évident que les manieres également poſſibles dont une ſeule de ces chances peut arriver, ſont repréſentées toutes par les termes de table ſuivante

$$a \quad b \quad c \quad d \quad f \quad -$$

dont le nombre eſt $m$.

Le nombre des manieres dont deux des chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la table ſuivante,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a b* | *b a* | *c a* | *d a* | *f a* | — |
| *a c* | *b c* | *c b* | *d b* | *f b* | — |
| *a d* | *b d* | *c d* | *d c* | *f c* | — |
| *a f* | *b f* | *c f* | *d f* | *f d* | — |
| — | — | — | — | — | |

dans laquelle le nombre des lettres eſt $m$, & où il eſt viſible que le nombre des termes eſt $m \cdot \overline{m-1}$.

Le nombre des manieres également poſſibles, dont trois des $m$ chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la Table ſuivante,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a b c* | *b a c* | *c a b* | *d a b* | *f a b* | —— |
| *a b d* | *b a d* | *c a d* | *d a c* | *f a c* | —— |
| *a b f* | *b a f* | *c a f* | *d a f* | *f a d* | —— |
| *a c b* | *b c a* | *c b a* | *d b a* | *f b a* | —— |
| *a c d* | *b c d* | *c b d* | *d b c* | *f b c* | —— |
| *a c f* | *b c f* | *c b f* | *d b f* | *f b d* | —— |
| *a d b* | *b d a* | *c d a* | *d c a* | *f c a* | —— |
| *a d c* | *b d c* | *c d b* | *d c b* | *f c b* | —— |
| *a d f* | *b d f* | *c d f* | *d c f* | *f c d* | —— |
| *a f b* | *b f a* | *c f a* | *d f a* | *f d a* | —— |
| *a f c* | *b f c* | *c f b* | *d f b* | *f d b* | —— |
| *a f d* | *b f d* | *c f d* | *d f c* | *f d c* | —— |
| —— | —— | —— | —— | —— | —— |
| —— | —— | —— | —— | —— | —— |
| —— | —— | —— | —— | —— | —— |
| —— | —— | —— | —— | —— | —— |

dans laquelle le nombre des lettres eſt $m$, & où il

t viſible que le nombre des termes eſt

$$m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}$$

Ainſi de ſuite : & continuant à procéder de ıême, on trouvera généralement que le nombre es manieres également poſſibles, dont un nombre des $m$ chances données peut arriver ſucceſſive- ıent une à une, eſt $m \cdot \overline{m-1} \ldots\ldots \overline{m-p+1}$ ; . *Q. F. D.*

## LXIII.

*EXEMPLE.* Sur les 90 numéros de la Lotterie oyale de France, on doit au tirage prochain en rer 5 ſucceſſivement une à une : pour ſavoir de ombien de manieres la choſe peut ſe faire, ou : qui eſt de même, combien il y a de quines dé- rminés également poſſibles ; dans l'expreſſion $\ldots\ldots \overline{m-p+1}$ je ſubſtitue 90 à $m$, 5 à $p$ ; & elle evient 90 ..... 86 = 5273912160. qui eſt le nom- e cherché.

## LXIV.

*COR.* Si $p = m$, l'expreſſion générale $m \ldots \overline{m-p+1}$ eviendra $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m$, qui eſt le produit de tous s nombres naturels depuis 1 juſqu'à $m$ incluſive- ent, c'eſt-à-dire que les $m$ chances peuvent venir ceſſivement une à une de $1 \cdot 2 \ldots\ldots m$, manieres ; nſi les 24 lettres de l'alphabet peuvent être toutes ommées ſucceſſivement chacune une fois, ou être ignées l'une à la ſuite de l'autre du nombre de ma- ieres $1.2 \ldots. 24 = 569357459561529999360000$.

## LXV.

*PROBLÊME I.* Sur le nombre total $m$ des chan- s dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de oſes donné, j'en diſtingue une partie, & repré- nte par $n$ le nombre des chances diſtinguées : Je omme ſucceſſivement une à une les chances diſ-

tinguées dans un ordre déterminé : par exemple, la chance $a$ la premiere, $b$ la 2$^e$, $c$ la 3$^e$, &c ; il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre $p$ d'entre les $m$ chances données : on demande de combien de manieres également poſſibles il peut arriver

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \\ \text{une} \\ \text{deux} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \text{le nombre } r \end{array}\right\} \text{juſte : d'entre les chances}$$

nommées, ſans qu'aucune de ces chances arrive à la place où elle a été nommée.

*SOLUT.* 1°. Aucune des chances nommées n'arrivant, les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées peuvent occuper les $p$ places ſuppoſées du nombre de manieres exprimé par $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$; (LXII.) donc le nombre de manieres également poſſibles dont il peut n'arriver aucune des chances nommées eſt $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$ ou 1. (1). $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$

2°. La chance $a$ peut occuper une des $p$ places ſuppoſées d'un nombre $p$ de manieres également poſſibles repréſentées par les termes de la table ſuivante

$$\begin{array}{ccccc} a & * & * & * & * \\ * & a & * & * & * \\ * & * & a & * & * \\ * & * & * & a & * \\ * & * & * & * & a \end{array}$$

dans laquelle on ſuppoſe que $p$ le nombre des places eſt 5, où on repréſente par * les places occupées par des chances qui n'ont point été nommées, & dans laquelle il eſt viſible que ſi on eut fait le nombre des places tout autre que 5, celui des termes auroit toujours été $p$.

Mais pour avoir le nombre de manieres dont $a$

peut arriver ailleurs qu'à ſa place, il faut, du nombre des termes de la table ci-deſſus, retrancher celui où $a$ ſe trouve à ſa place : donc la chance $a$ peut arriver ailleurs qu'à ſa place, du nombre de manieres exprimé par $p-1$.

Ce qui vient d'être dit de la chance $a$ peut s'appliquer à chacune des autres chances nommées $b$, $c$, $d$, &c. qui ſont au nombre de $n$ ; d'où l'on voit que le nombre de manieres dont une ſeule des chances nommées peut arriver ſans que ce ſoit à ſa place, eſt $n.\overline{p-1}$.

Mais à chacune de ces manieres, un nombre $p-1$ d'entre les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées, peuvent arriver dans les $p-1$ places reſtantes du nombre de manieres exprimé par $\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+2}$ : (LXII.)

Donc dans l'hypotheſe préſente, le nombre de manieres également poſſibles dont une ſeule des chances nommées peut arriver ailleurs qu'à ſa place, eſt $n.\overline{p-1}.\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+2}$ ou

$$\frac{n}{1}.\binom{1.p}{-1}.\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+2}.$$

3°. La chance $a$ & la chance $b$ peuvent occuper deux d'entre les $p$ places données, de $p.\overline{p-1}$ manieres repréſentées par les termes de la table ſuivante

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $*$ | $*$ | $*$ | | $b$ | $a$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| $a$ | $*$ | $b$ | $*$ | $*$ | | $b$ | $*$ | $a$ | $*$ | $*$ |
| $a$ | $*$ | $*$ | $b$ | $*$ | | $b$ | $*$ | $*$ | $a$ | $*$ |
| $a$ | $*$ | $*$ | $*$ | $b$ | | $b$ | $*$ | $*$ | $*$ | $a$ |
| $*$ | $a$ | $b$ | $*$ | $*$ | | $*$ | $b$ | $a$ | $*$ | $*$ |
| $*$ | $a$ | $*$ | $b$ | $*$ | | $*$ | $b$ | $*$ | $a$ | $*$ |
| $*$ | $a$ | $*$ | $*$ | $b$ | | $*$ | $b$ | $*$ | $*$ | $a$ |
| $*$ | $*$ | $a$ | $b$ | $*$ | | $*$ | $*$ | $b$ | $a$ | $*$ |
| $*$ | $*$ | $a$ | $*$ | $b$ | | $*$ | $*$ | $b$ | $*$ | $a$ |
| $*$ | $*$ | $*$ | $a$ | $b$ | | $*$ | $*$ | $*$ | $b$ | $a$ |

deſquels il faut retrancher ceux où $a$ occupe la 1re.

place, & ceux où $b$ occupe la 2$^e$. place, leſquels ſont au nombre de $2p-1$; moins celui où $a$ étant à la 1$^e$. place, $b$ eſt à la 2$^e$.

Ainſi les deux chances $a$ & $b$ peuvent arriver ſans que ce ſoit à leurs places du nombre de manieres $p.\overline{p-1}-2.\overline{p-1}+1$.

Ce qui vient d'être dit des chances $a$ & $b$ peut s'appliquer également aux chances

$$\left\{\begin{array}{llll} a \ \& \ b, & & & \\ a \ \& \ c, & b \ \& \ c & & \\ a \ \& \ d, & b \ \& \ d & c \ \& \ d & \\ \text{———} & \text{———} & \text{———} & \text{———} \end{array}\right.$$

au nombre $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$; d'où l'on voit que 2 des chances nommées peuvent arriver ſeules ſans que ce ſoit à leurs places de $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.p-1 \\ +1 \end{array}\right\}$ manieres.

Mais à chacune de ces manieres : $\overline{p-2}$ d'entre les chances qui n'ont pas été nommées, peuvent occuper les $\overline{p-2}$ places reſtantes de $\overline{m-n}...\overline{m-n-p+3}$ manieres :

Donc le nombre des manieres également poſſibles, dont deux ſeulement d'entre les chances nommées peuvent arriver ailleurs qu'à leurs places, eſt

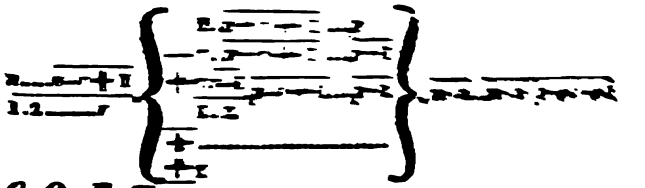
$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.p-1 \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}...\overline{m-n-p+3}.$$

4°. En continuant de procéder de même, on trouvera ſucceſſivement que le nombre des manieres également poſſibles dont 3, 4, &c. ſeulement des chances nommées peuvent arriver, ſans qu'aucune arrive à ſa place, eſt

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-2}.\overline{p-1}.p \\ -3.\overline{p-2}.p-1 \\ +3.p-2 \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}...\overline{m-n-v+4};$$

&c.

D'où l'on voit bien qu'entre les mêmes hypothèses, le nombre des cartes [illegible] chances [illegible] où elle a été nommée, est



*C. Q. F. T.*

## LXVI.

*EXEMP.* Sur 10 cartes différentes posées sur une table, j'en distingue 6 que je nomme par ordre une à une : sur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & sans choix, mais une à une & successivement : il s'agit de savoir, de combien de manières également possibles, dans les 8 cartes tirées il peut s'en trouver 4 ni plus ni moins de celles que j'ai nommées, sans qu'une seule se trouve à la place où elle a été nommée.

Pour y parvenir : dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je substitue 10 à $m$, 6 à $n$, 8 à $p$, 4 à $r$, & elle devient

$$\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\left\{\begin{array}{rl} & 1\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 \\ - & 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \\ + & 6\cdot 5\cdot 6 \\ - & 4\cdot 5 \\ + & 1 \end{array}\right\} = 4.3.2.1 = 360360$$

qui est le nombre cherché.

## LXVII.

*Coroll.* Si ſur les $m$ chances dépendantes d'u état de choſes donné, on en nomme $n$ une à une aſſignant à chacune une certaine place, & s'il doi arriver ſucceſſivement une à une un nombre $p$ d ces chances données, la probabilité qu'il arrive un nombre $r$ juſte d'entre les $n$ chances nommé ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſ gnée, eſt

$$\frac{\overline{n\ldots n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-r+1}\ldots\ldots p \\ -r.\overline{p-r+1}\ldots\ldots p-1 \\ +\frac{r.r-1}{1.2}.\overline{p-r+1}\ldots p-2 \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n\ldots m-n-p+r+}}{m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}}$$

car le numérateur de cette probabilité eſt éviden ment la formule générale trouvée au problême 1 ci-deſſus, & le dénominateur eſt $\overline{m\ldots m-p+1}$ (LXII

## LXVIII.

*Exemple.* Si ſur 10 cartes données on en nomm 6 une à une, aſſignant à chacune une place déte minée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 de c cartes : la probabilité que dans les 8 cartes tirée il s'en trouvera 4 juſte des nommées, ſans qu'u ſeule ſoit tirée à la place qui lui a été aſſignée, $\frac{360360}{1814400} = \frac{1001}{5010}$.

## LXIX.

Si $n = p$; La formule générale devient

$$\frac{\overline{n\ldots n-r+1}}{1.2\ldots r}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{n-r+1}\ldots n \\ -r.\overline{n-r+1}\ldots n-1 \\ +\frac{r.r-1}{1.2}.\overline{n-r+1}\ldots n-2 \\ -+\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n\ldots m-2n+r+}}{m\ldots\ldots\overline{m-n+1}}$$

ainſ

ainſi, ſur 10 cartes différentes données, ſi on en nomme 8 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il s'en trouvera 6 juſte des nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}\left\{\begin{array}{r} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7. \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}.\frac{2.1}{3.4.5.6.7.8.9.10}$$

$$= \frac{9403}{32400}.$$

## L X X.

Si $n = r$, la formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{r} 1.\overline{p-n+1}.....\overline{p} \\ -\ n.\overline{p-n+1}.....\overline{p-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées toutes les nommées ſe trouveront, ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{r} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 = \frac{9403}{151400}.$$

## LXXI.

Si $p=n=r$ : La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ \ 1.2.....p \\ -p.\ \ 1.2.....p-1 \\ +\frac{p.p-1}{1.2}.1.2.....p-2 \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-p+1} =$$

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....\pm\frac{1}{1.2...p}\right).\frac{1.2.....p}{m...\overline{m-p+1}};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 8 une à une, en aſſignant à chacune une place déterminée; & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que les 8 cartes tirées ſeront les 8 nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée dans le tirage, eſt

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\right) : 45$$
$$=\frac{2119}{259200}.$$

## LXXII.

Si $m=p$ & $r=n$ : La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{m-n+1}.....m \\ -n.\overline{m-n+1}.....\overline{m-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{m-n+1}.....\overline{m-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 3 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & ſi l'on tire ſans choix une à une les dix cartes données ; la probabilité qu'aucune des cartes nommées ne ſe trouvera à la place du tirage qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{matrix} 1.8.9.10 \\ -3.8.9 \\ +3.8 \\ -1 \end{matrix}\right\} : 10.9.8 = \frac{527}{720}$$

## LXXIII.

Si $m = p = n = r$, la formule générale se réduit à $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots m}$; ainsi, si l'on nomme ſucceſſivement une à une 13 cartes données, & qu'à chaque carte qu'on nomme on tire aveuglément & ſans choix une des 13 cartes données : la probabilité qu'aucune des cartes tirées ne ſera celle qu'on nomme en même temps, eſt $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots - \frac{1}{1.2.3\ldots 11.12.13} = \frac{63633137}{172972800}$.

## LXXIV.

Si $r = o$; la formule générale devient $\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}}{m\ldots\ldots\overline{m-p+1}}$; ainsi, ſi ſur 13 cartes données on en nomme 4 dans un ordre déterminé, & qu'on en tire 6 une à une & ſans choix : la probabilité que dans les 6 cartes tirées il n'y en aura aucune de celles qu'on a nommées, eſt $\frac{9\ldots\ldots 4}{13\ldots\ldots 8} = \frac{7}{143}$.

## LXXV.

*PROBLÊME II.* Sur le nombre $m$ total des chances dépendantes d'un état de choſes donné, j'en diſtingue une partie, & repréſente par $n$ le nombre des chances diſtinguées : je nomme ſucceſſivement une à une les chances diſtinguées dans un ordre déterminé : il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre $p$ d'entre les $m$ chances don-

nées : on demande de combien de manieres également poſſibles il peut ſe faire qu'aucune des $n$ chances diſtinguées n'arrive dans la place que je lui ai aſſignée en la nommant.

*SOLUT.* Il eſt évident que le nombre cherché eſt compoſé du nombre des manieres dont 0, 1, 2, 3, 4, .... $n$ des chances diſtinguées peuvent arriver ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée en la nommant; c'eſt-à-dire, que le nombre cherché eſt la ſuite ſuivante : ( LXV. )

$$1 \cdot \left\{ 1 \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}$$

$$+\frac{n}{1} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot p \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+2}$$

$$+\frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-1} \cdot p \\ -2 \cdot p-1 \\ +1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+3}$$

$$+\frac{n \cdot \overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-2} \cdot \overline{p-1} \cdot p \\ -3 \cdot p-2 \cdot p-1 \\ +3 \cdot p-2 \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}....\overline{m-n-p+4}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-n+1}.....p \\ -n \cdot p-n+1.....p-1 \\ +\frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot p-n+1.....p-2 \\ +\frac{1}{+1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}....\overline{m-p+1};$$

*C. Q. F. T.*

## LXXVI.

*EXEMP.* Sur 10 cartes différentes données j'en diſtingue 6 que je nomme une à une, aſſignant à chacune une place déterminée :

Sur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & ſans choix; mais une à une & ſucceſſivement : il s'agit de ſavoir de combien de manieres

également poſſibles aucune des 6 cartes nommées peut ne ſe trouver à la place qui lui a été aſſignée dans le tirage.

Pour y parvenir, dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je ſubſtitue 10 à $m$, 6 à $n$, 3 à $p$; & elle devient

$$\frac{1 \cdot 5}{\cdot 2} \cdot \left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 6 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 4 \cdot 5 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$+ 6 \cdot \left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 10 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 10 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 5 \cdot 4 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$+ 1 \cdot \left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 15 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 20 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 15 \cdot 3 \cdot 4 \\ - 6 \cdot 3 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3$$

1 982812; qui eſt le nombre cherché.

## LXXVII.

*COROLL. I.* Si ſur les $m$ chances dépendantes d'un état de choſes donné, on en nomme $n$ une à une, aſſignant à chacune une place déterminée; & il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre d'entre les $m$ chances données; la probabilité qu'aucune des $n$ chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left(1 \cdot \left\{ \begin{array}{r} 1 \\ \end{array} \right\}_{n} \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+1}\right.$$

$$\left. \cdot n \cdot \left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot p \\ -1 \end{array} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+2} \right.$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\begin{matrix}1.\overline{p-1}.p\\2.\overline{p-1}\\1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p\\-n.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p-1\\+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big):$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$

car le numérateur de cette probabilité eſt évidemment la formule générale trouvée au Problême II. ci-deſſus; & le dénominateur eſt $m\ldots\ldots\overline{m-p+1}$ (LXII.)

## LXXVIII.

*EXEMPLE.* Si ſur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 ſucceſſivement une à une: & que ſur les 10 cartes donnnées on en tire 8 aveuglément & ſans choix, mais une à une ſucceſſivement: la probabilité qu'aucune des 6 cartes nommées ne ſe trouvera à la place qui lui aura été aſſignée dans le tirage eſt $\frac{982812}{1814400}=\frac{1901}{151200}$.

## LXXIX.

Si $n=p$, la formule générale devient

$$\Big[1.(1).\ \overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+1}$$

$$+p.\left(\begin{matrix}1\cdot p\\-1\end{matrix}\right).\overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+2}$$

$$+\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}\cdot\left(\begin{matrix}1.\overline{p-1}.p\\-2.\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right)\cdot\overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots p}\right).1.2\ldots\ldots p\Big]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$

ainſi, ſi ſur 10 cartes différentes données on en nomme 8 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il ne ſe trouvera pas une ſeule des cartes nommées dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left[\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\left\{\begin{array}{r} 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\\ -\ 6\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\\ +15\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\\ -20\cdot 3\cdot 4\cdot 5\\ +15\cdot 3\cdot 4\\ -\ 6\cdot 3\\ +\ 1\end{array}\right\}\cdot 2\cdot 1\right.$$

$$+8\cdot\left\{\begin{array}{r} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\\ -\ 7\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\\ +21\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\\ -35\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\\ +35\cdot 2\cdot 3\cdot 4\\ -21\cdot 2\cdot 3\\ +\ 7\cdot 2\\ -\ 1\end{array}\right\}\cdot 2$$

$$\left.+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots 8}\right)\cdot 1.2\ldots 8\right] :$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3. = \frac{818393}{1814400}.$$

## LXXX.

Si $m=p$, la formule générale ſe réduit à

$$\left\{\begin{array}{r} 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p}\\ -n\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-1}\\ +\frac{n\cdot\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +1\end{array}\right\} : m\ldots\ldots\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſi ſur 10 cartes différentes données on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place

déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une les 10 cartes données : la probabilité qu'il n'arrivera dans le tirage aucune des 6 cartes nommées à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{r} 1.5.6.7.8.9.10 \\ -6.5.6.7.8.9 \\ +15.5.6.7.8 \\ -20.5.6.7 \\ +15.5.6 \\ -6.5 \\ +1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 =$$

$$\frac{81901}{151200}.$$

## LXXXI.

Si $m = p = n$; la formule générale ſe reduit à

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots.m}.$$

qui eſt la même trouvée ci-deſſus ( LXXIII. )

## LXXXII.

*Coroll. II.* Si ſur les $m$ chances dépendantes d'un état de choſes données, on en nomme $n$ une à une, aſſignant à chacune une place déterminée : & s'il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre $p$ d'entre les $m$ chances données : la probabilité qu'une au moins d'entre les $n$ chances nommées arrivera dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$1 - \left[1 . \binom{1}{1}\right. \overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+1}$$

$$+ n . \binom{1.p}{-1} \cdot \overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+2}$$

$$+ \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \cdot \left(\begin{array}{r} 1.\overline{p-1}.p \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{array}\right) \cdot \overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1\left\{\begin{array}{r} 1.\overline{p-n+1}.....p \\ -n.\overline{p-n+1}.....\overline{p-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}.....\overline{m-p+1}\Big] :$$

$$m.....\overline{m-p+1}. \quad \text{(XV. LXXVII.)}$$

Et ſi $n=p$; cette probabilité eſt

$$1-\Big[1.(1) \quad .\overline{m-p}.....\overline{m-2p+1}$$

$$+p.\begin{pmatrix} 1.p \\ -1 \end{pmatrix} \quad .\overline{m-p}.....\overline{m-2p+2}$$

$$+\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}.\begin{pmatrix} 1.\overline{p-1}.p \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{pmatrix}.\overline{m-p}.....\overline{m-2p+3}$$

$$+.....$$

$$+1\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....\pm\frac{1}{1.2....p}\right).$$

$$1.2.3.....p\Big]:\overline{m.....m-p+1}.$$

(XV. LXXIX.)

Et ſi $m=p$; cette probabilité eſt

$$1-.\left\{\begin{array}{r} 1.\overline{p-n+1}....p \\ -n.\overline{p-n+1}....\overline{p-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}....\overline{p-2} \\ -+..... \\ +1 \end{array}\right\}:m.....\overline{m-n+1}$$

(XV. LXXX.)

Et ſi $m=n=p$; cette probabilité eſt

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+.....\pm\frac{1}{1.2.3.....m}.$$

Ainſi, ſi l'on nomme ſucceſſivement une à une 13 cartes données; & ſi à chaque carte qu'on nomme, on tire aveuglément & ſans choix une des 13 cartes données: la probabilité qu'il ſe trouvera au moins

une des cartes tirées qui ſera celle qu'on nomme en même temps, eſt

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}=\frac{109339663}{172972800}.$$

## LXXXIII.

*PROBLÊME III.* Sur le nombre total $m$ des chances dépendantes d'un état de choſes donné, on en nomme une partie au nombre $n$, aſſignant à chacune une place déterminée : il en doit arriver une partie au nombre $p$, une à une & ſucceſſivement : on demande quelle eſt la probabilité que dans les $p$ chances qui arriveront il s'en trouve un nombre $r$ juſte de celles qu'on a nommées ; chacune dans la place qui lui a été aſſignée, & un nombre $t$ juſte de celles qu'on a nommées ailleurs que dans les places qui leur ont été aſſignées.

*SOLUT.* Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'obſerve que le nombre de manieres dont ſur les $n$ chances nommées on peut en prendre $r$ pour les mettre chacune dans la place qui lui a été aſſignée, eſt $\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}$ (XL.)

Mais chacune de ces manieres étant déterminée, il reſte $m-r$ d'entre les chances données, & $p-r$ chances qui doivent encore arriver, & ſur ces $n-r$ chances nommées, il faut en prendre $t$ pour les mettre chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée.

Or, le nombre des chances données étant $\overline{m-r}$, celui des chances nommées $\overline{n-r}$, celui des chances arrivantes $\overline{p-r}$; pour avoir le nombre de manieres dont parmi les $\overline{p-r}$ chances arrivantes il peut s'en trouver un nombre $t$ juſte d'entre les $\overline{n-r}$ nom-

mées, ſans qu'une ſeule ſe trouve à la place qui lui a été aſſignée : il faut, dans la formule générale trouvée au Problême 1er. (LXV.) ſubſtituer $\overline{m-r}$ à $m$; $\overline{n-r}$ à $n$; $\overline{p-r}$ à $p$; $t$ à $r$: au moyen de quoi elle devient

$$\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t}\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+..... \\ +1 \end{array}\right.\begin{array}{l} .\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r} \\ .p-r-t+1.....\overline{p-r-1} \\ .p-r-t+1.....p-r-2 \\ \\ \end{array}\Bigg\}.$$

$$\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+1};$$

Donc cette quantité étant multipliée par $\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}$ donnera un produit qui ſera le numérateur de la probabilité cherchée : dailleurs le dénominateur de cette même probabilité eſt toujours $m.....\overline{m-p+1}$ : Donc la probabilité cherchée eſt

$$\frac{n.\overline{n-1}.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}.\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+..... \\ +1 \end{array}\right.\begin{array}{l} .\overline{p-r-t+1}....\overline{p-r} \\ .p-r-t+1....p-r-1 \\ .p-r-t+1....p-r-2 \\ \\ \end{array}\Bigg\}.\frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+1}.}{m.....\overline{m-p+1}};$$

*C. Q. F. T.*

## LXXXIV.

*Exemple.* Si ſur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 ſucceſſivement une à une, aſſignant à chacune une place déterminée; ſi enſuite on tire aveuglément & ſans choix 8 d'entre les 10 cartes données, & qu'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve juſte 3 des nommées chacune à la place qui lui a été aſſignée, & 2 juſte des nom-

mées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans la formule générale ci-dessus trouvée, je fais $m = 10$, $p = 8$, $n = 6$, $r = 3$, $t = 2$, & elle devient $\frac{6.5.4}{1.2.3} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \begin{pmatrix} 1.4.5 \\ -2.4 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \frac{4.3.2}{10.9..3} = \frac{13}{1260}$.

## LXXXV.

*PROBLÊME IV.* Sur le nombre total $m$ des chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme une partie au nombre $n$, assignant à chacune une place déterminée ; il en doit arriver successivement une à une, un nombre $p$ : on demande quelle est la probabilité que parmi les $p$ chances qui arriveront, il s'en trouve un nombre $t$ juste de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée, & un nombre $r$ au moins de celles qu'on a nommées ; chacune à la place qui lui a été assignée.

*SOLUT.* Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'observe qu'il doit être composé des produits suivants, savoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $r$ juste des chances nommées chacune dans la place qui lui a été assignée, & $t$ juste des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : Or, ce nombre de manieres est comme on vient de le voir par la solution du problême précédent

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots t} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \cdot \overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r} \\ -t & \cdot \overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} & \cdot \overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ +1 & \end{array} \right\} \cdot$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r} \cdot \overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1};$$

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $r+1$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui lui a été aſſignée, & $t$ juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-1}.\ldots.\overline{n-r-t}}{1.2.\ldots.t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r-1} \\ -t\ .\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r-2} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n.\ldots.\overline{n-r}}{1.2.\ldots.\overline{r+1}}\cdot\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+2}$$

3°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $r+2$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui a été aſſignée, & $t$ juſte des chances nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-2}.\ldots.\overline{n-r-t-1}}{1.2.\ldots.t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\overline{p-r-t-1}.\ldots.\overline{p-r-2} \\ -t\ .\overline{p-r-t-1}.\ldots.\overline{p-r-3} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\overline{p-r-t-1}.\ldots.\overline{p-r-4} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n.\ldots.\overline{n-r-1}}{1.2.\ldots.\overline{r+2}}\cdot\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+3}$$

ainſi de ſuite :

Et enfin du nombre de manieres dont il peut arriver $n-t$ juſte des chances nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée, & $t$ juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée ; or, ce nombre de manieres eſt

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \frac{\overline{n\ldots\ldots t+1}}{1.2\ldots\ldots n-t}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\cdot$$

Donc le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſomme de tous ces produits particuliers : & par conſéquent cette probabilité eſt

$$\left[\frac{\overline{n-r}\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\right.\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ .\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ .\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}+$$

$$\frac{\overline{n+r-1}\ldots\overline{n-r-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-1} \\ .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-2} \\ .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots n-r}}{1.2\ldots\overline{r+1}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots t+1}}{1.2\ldots\ldots n-t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\left.\right]\cdot m\ldots\ldots\overline{m-p+1}\cdot \quad C.\ell.F.T.$$

## LXXXVI.

*EXEMPLE.* Si ſur 12 cartes données on en nomme 8, aſſignant à chacune une place déterminée ; & qu'enſuite on en tire 10 une à une ; & qu'on deſire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve 2 juſte des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été aſſignées, & 4 au moins des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans la formule générale ci-deſſus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 4$, $t = 2$ : & elle devient

$$\left[\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 5\cdot 6\\ -2\cdot 5\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 +\right.$$

$$\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 4\cdot 5\\ -2\cdot 4\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 4\cdot 3\cdot 2 +$$

$$\left.\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 3\cdot 4\\ -2\cdot 3\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 4\cdot 3\right] : 12.11\ldots\ldots 3$$

$$= \frac{793}{12800}.$$

## LXXXVII.

*PROBLÊME V.* Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Problême précédent : Trouver la probabilité que dans les $p$ chances arrivantes, il y en aura un nombre $t$ juſte de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée, & un nombre $r$ au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée.

*SOLUT.* Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'obſerve qu'il doit être compoſé des produits ſuivants, ſavoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $t$ juſte des chances nommées chacune dans la place qui lui a été aſſignée, & $t$ juſte des nommées,

chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce nombre de manieres eſt

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ -t\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot \overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1};$$

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver 1 juſte d'entre les nommées, à la place qui lui a été aſſignée; & $t$ juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ -t\ .\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\ .\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot n.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2};$$

ainſi de ſuite: & enfin,

Du nombre de manieres dont il peut arriver $r$ juſte des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée, & $t$ juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ -t\ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot \frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1};$$

Donc le numérateur de la probabilité cherchée eſt

eſt la ſomme de tous ces produits ; & par conſéquent cette probabilité eſt

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\\ -t\\ +\frac{t.t-1}{1.2}\\ -+\\ \pm 1\end{array}\right.\begin{array}{l}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots p\\ \cdot p-t+1\ldots\ldots\overline{p-1}\\ \cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\ \cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}$$

$$+\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\\ -t\\ +\frac{t.t-1}{1.2}\\ -+\\ \pm 1\end{array}\right.\begin{array}{l}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1}\\ \cdot p-t\ldots\ldots p-2\\ \cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3}\\ \cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$n\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}$$

$$+\frac{\overline{n-2}\ldots\overline{n-t-1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\\ -t\\ +\frac{t.t-1}{1.2}\\ -+\\ \pm\end{array}\right.\begin{array}{l}\cdot\overline{p-t-1}\ldots\overline{p-2}\\ \cdot p-t-1\ldots\ldots p-3\\ \cdot\overline{p-t-1}\ldots\ldots\overline{p-4}\\ \cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n\cdot\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\\ -t\\ +\frac{t.t-1}{1.2}\\ -+\\ \pm 1\end{array}\right.\begin{array}{l}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r}\\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-1}\\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-2}\\ \cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\Big]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.\ C.Q.F.T.$$

## LXXXVIII.

*EXEMPLE.* Si ſur 12 cartes données on en

nomme 8, assignant à chacune une place déterminée ; & qu'ensuite on en tire 10 une à une, & qu'on desire que dans les 10 cartes tirées il s'en trouve 2 juste des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été assignées, & 3 au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré, dans la formule générale ci-dessus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 3$, $t = 2$ : & elle devient

$$\left[\frac{8.7}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.9.10\\-2\,9\\+1\end{pmatrix}.1.4.3.2.1.0.-1.-2.-3\;+\right.$$

$$\frac{7.6}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.8.9\\-2.8\\+1\end{pmatrix}.8.4.3.2.1.0.-1.-2\;+$$

$$\frac{6.5}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.7.8\\-2.7\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7}{1.2}\,4.3.2.1.0.-1\;+$$

$$\left.\frac{5.4}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.6.7\\-2.6\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3}.4.3.2.1.0\right] : 12 \ldots\ldots 3 = 0 :$$

d'où l'on voit que le hazard desiré est impossible.

## LXXXIX.

*Remarque* I^re. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3^e, 4^e, & 5^e, on fait $t = 0$ ; elles deviennent 1°.

$$\frac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}}\,;$$

2°.

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\right.$$

$$+\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+1}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}$$

$$+\frac{n\ldots\overline{n-r-1}}{1.2\ldots\overline{r+2}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]:m\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

3°.

$$[\;1.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$$

$$+n.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\;]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

qui ſont les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant allieurs qu'à la place qui lui a été aſſignée; il ſe trouvera parmi les $p$ chances arrivantes, le nombre $r$ { juſte / au moins / au plus } d'entre les $n$ chances nommées, chacune dans la place qui lui aura été aſſignée.

Et ſi dans la premiere de ces expreſſions on ſubſtitue ſucceſſivement à $r$ tous les nombres entiers depuis $o$ juſqu'à $n$ incluſivement, on aura,

4°.

$$[\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}\;+$$

$$n.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}\;+$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}\;+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;+$$

$$1.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\;]:m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

pour la probabilité qu'aucune des chances nom-

mées n'arrivera ailleurs que dans la place qui lui aura été assignée.

## X C.

*PROBLÊME VI.* Les mêmes choses étant supposées que dans les Problêmes précédents : on demande quelle est la probabilité que parmi les $p$ chances arrivantes, il s'en trouvera un nombre $r$ juste d'entre les $n$ nommées, chacune à la place qui lui a été assignée, & un nombre $t$ $\left(\begin{matrix}\text{au moins}\\ \text{au plus}\end{matrix}\right)$ d'entre les $n$ nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée.

*SOLUT.* 1°. Dans l'expression générale trouvée au problême 3e. substituez successivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $t$ jusqu'à $\overline{n-r}$ inclusivement : & elle devient

$$\frac{n.\overline{n-r+1}}{1.2.3.\ldots.r.m.\ldots.\overline{m-p+1}}\cdot\Bigg[\Bigg\{1\cdot\overline{p-r-t+1}.\ldots.\overline{p-r} - t\cdot\overline{p-r-t+1}.\ldots.\overline{p-r-1} + \frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}.\ldots.\overline{p-r-2} - +\ldots\ldots\ldots\ldots + 1\Bigg\}\cdot\frac{\overline{n-r}.\ldots.\overline{n-r-t+1}}{1.2.\ldots.t}\cdot\frac{\overline{m-n}.\ldots.\overline{m-n-p+r+t+1}}{}+$$

$$\Bigg\{1\cdot\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r} - t+1\cdot\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r-1} + \frac{t.t+1}{1.2}\cdot\overline{p-r-t}.\ldots.\overline{p-r-2} - +\ldots\ldots\ldots\ldots + 1\Bigg\}\cdot\frac{\overline{n-r}.\ldots.\overline{n-r-t}}{1.2.\ldots.\overline{t+1}}\cdot\frac{\overline{m-n}.\ldots.\overline{m-n-p+r+t+2}}{}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ -\overline{n-r}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ +\dfrac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ \quad -\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]$$

qui eſt la 1^e^. probabilité cherchée.

2°.

Dans la même formule génerale trouvée au Problême 3^e^. ſubſtituez ſucceſſivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $o$ juſqu'à $t$, incluſivement : & elle devient

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r.m\ldots\ldots\overline{m-p+1}}\cdot\Big[$$

$$1\cdot\left\{\begin{array}{l}1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}+$$

$$\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot\overline{p-r}\\-1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot\overline{p-r-1}\ldots p-r\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{array}{l}1\ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r}\\-t\ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1}\\+\dfrac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2}\\-\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots t}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\Big]$$

qui eſt la 2^e^. probabilité cherchée.

## X C I.

*Remarque* 2^e^. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3^e^. & 6^e^. on fait $r=o$, elles deviennent 1°.

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots p \\ -t\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1\end{array}\right\},$$

$$\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}}{m\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

2°.

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}\,.\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots p \\ -t\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1\end{array}\right\} +$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots\overline{t+1}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots p \\ -\overline{t+1}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{\overline{t+1}.t}{1.2}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1\end{array}\right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$1\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,.$$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots p \\ -n\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1\end{array}\right\}\right] : m\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,.$$

3°.

$$\left(1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}+\right.$$

$$n\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot p\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}+$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-1}.p\\-2.\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-t+1}\ldots\ldots p\\-t.\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1}\\+\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right\}\cdot$$

$$\left.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}\right):m\ldots\ldots\overline{m-p+1}\cdot$$

qui ſont les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant à la place qu'on lui a aſſignée, il ſe trouvera parmi les $p$ chances arrivantes le nombre $t$ $\left\{\begin{matrix}\text{juſte}\\\text{au moins}\\\text{au plus}\end{matrix}\right\}$ d'entre les $n$ chances nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été aſſignée.

Et ſi dans la premiere de ces formules, on ſubſtitue ſucceſſivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $o$ juſqu'à $n$ incluſivement, on aura 4°. la formule déja trouvée (LXXVII.) pour la probabilité qu'aucune des chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été aſſignée.

## XCII.

*Remarque III.* 1°. Si dans la formule générale trouvée au problême 4e. on ſubſtitue ſucceſſivement

à $t$ tous les nombres entiers depuis $\binom{t}{0}$ jusqu'à $\overline{\frac{n-r}{t}}$ inclusivement, & qu'on ajoute ensemble tous les produits qui en naîtront : on aura pour somme la probabilité que dans les $p$ chances arrivantes il s'en trouvera $\binom{\text{au moins}}{\text{au plus}}$ $t$, d'entre les $n$ nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée; & un nombre $r$ au moins d'entre les $n$ nommées chacune à la place qui lui a été assignée.

2°. Si dans la formule générale trouvée au problême 5e. on substitue successivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $\binom{t}{0}$ jusqu'à $\binom{n}{t}$ inclusivement ; & qu'on prenne la somme de tous les produits qui en résulteront : cette somme sera la probabilité que dans les $p$ chances arrivantes il s'en trouvera $\binom{\text{au moins}}{\text{au plus}}$ $t$ d'entre les $n$ nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : & un nombre $r$ au plus d'entre les $n$ nommées, chacune à la place qui lui a été assignée.

On trouveroit les mêmes probabilités, si dans la premiere formule du problême 6e. on substituoit successivement à $r$ tous les nombres entiers depuis $\binom{r}{0}$ jusqu'à $\overline{\frac{n-t}{r}}$ inclusivement, en prenant la somme de tous les produits qui en résulteroient : & si dans la 2e. formule du même problême 6e. on substituoit successivement à $r$ tous les nombres entiers depuis $\binom{r}{0}$ jusqu'à $\binom{n}{r}$, & qu'on prit la somme de tous les produits qui en résulteroient.

## XCIII.

*PROBLÊME VII.* Les mêmes choses étant sup-

ɔſées que dans les problêmes précédents, trouver probabilité qu'il arrivera un nombre $t$ juſte d'entre ꜱ $n$ chances nommées, chacune ailleurs qu'à la lace qui lui a été aſſignée.

*SOLVT.* Dans la formule générale trouvée au Problême 3ᵉ. je ſubſtitue ſucceſſivement à $r$ tous les ombres entiers depuis $o$ juſqu'à $\overline{n-t}$ incluſivement, & j'ai pour la probabilité cherchée :

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{ \begin{array}{r} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{ \begin{array}{r} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{ \begin{array}{r} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{ \begin{array}{r} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+ \\ \pm 1 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

C. Q. F. T.

## XCIV.

*REMARQUE IV.* Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $\binom{t}{o}$ juſqu'à $\binom{n}{t}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits ré-

ſultants de ces ſubſtitutions : cette ſomme ſera la probabilité que parmi les $p$ chances arrivantes il s'en trouvera $\left(\begin{matrix}\text{au moins}\\ \text{au plus}\end{matrix}\right)$ $t$ d'entre les $n$ nommées, qui ſeront chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été aſſignée en la nommant.

## XCV.

*PROBLÊME VIII.* Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents : on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre $r$ juſte d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

*SOLUT.* Dans la formule générale trouvée au Problême 3°. je ſubſtitue ſucceſſivement à $t$ tous les nombres entiers depuis $o$ juſqu'à $\overline{n-r}$ incluſivement : j'ajoute enſemble tous les produits qui réſultent de cette ſubſtitution ; & j'ai pour ſomme

$$\frac{m\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\cdot\left[1\left\{1\right\}.\overline{m-n},\ldots,\overline{m-n-p+r+1}\right.$$

$$+\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r-1}.\overline{p-r}\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r}\\-\overline{n-r}.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-1}\\+\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\left.\right];$$

$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}$ ; qui eſt la probabilité cherchée.

## XCVI.

*Problême IX.* Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre $r$ au moins d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

*Solut.* Dans la formule générale trouvée au Problême précédent, je ſubſtitue ſucceſſivement à $r$ tous les nombres entiers depuis $r$ juſqu'à $n$ inclusivement, j'ajoute enſemble tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions, & j'ai pour ſomme

$$\left(\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\right.\left.\cdot\left[1.\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\right.\right.+$$

$$\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r-1}.\overline{p-r}\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\left.\left.1.\left\{\begin{matrix}1\\-\overline{n-r}\\+\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right.\right.\left.\left.\begin{matrix}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r}\\\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1}\\\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\right]$$

$$+\frac{n\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\overline{r+1}}\cdot\left[1.\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}+\right.$$

$$\overline{n-r-1}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r-1}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+3}+$$

$$\frac{\overline{n-r-1}.\overline{n-r-2}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r-2}.\overline{p-r-1}\\-2.\overline{p-r-2}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+4}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-n+1}.\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ -\overline{n-r-1}\ .\ \overline{p-n+1}.\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ +\dfrac{\overline{n-r-1}.\overline{n-r-2}}{1.2}\ .\ \overline{p-n+1}.\ldots\ldots\overline{p-r-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}.$$

$$\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p+1}\ ]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n\ .\ \overline{n-1}}{1.2}.\ \Big[1.\left\{1\right\}\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p-1}\ +$$

$$2.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+2} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p}\ +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+1}.\overline{p-n+2} \\ -2.\overline{p-n+1} \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}.\ldots\overline{m-p+1}\ ]$$

$$+n.\ [\ 1.\left\{1\right\}.\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p}\ +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+1} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p+1}\ ]$$

$$+\ 1.[\ 1.\left\{1\right\}.\overline{m-n}.\ldots\overline{m-p+1}\ ]\ \Big)\ :\ m.\ldots\overline{m-p+1}$$

qui eſt la probabilité cherchée.

## XCVII.

*Problême X.* Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre $r$ au plus d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

*Solut.* Dans la formule générale trouvée au Problême 8e. je ſubſtitue ſucceſſivement à $r$ tous les nombres entiers depuis $o$ juſqu'à $r$ incluſivement : j'ajoute enſemble les produits réſultants de ces ſubſtitutions, & j'ai pour ſomme,

$$1\cdot\left[1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}+\right.$$

$$n\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot p\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}+$$

$$\frac{\overline{n-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-1}\cdot p\\-2\cdot p-1\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p}\\-n\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1}\\+\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]$$

$$+n\cdot\left[1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}+\right.$$

$$\overline{n-1}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-1}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-2}.\overline{p-1}\\-2\cdot\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+4}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1}\\-\frac{1}{n-1}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2}\\+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-3}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\Big[1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}+$$

$$\overline{1-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{1-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\left\{\begin{matrix}\overline{p-r-1}.\overline{p-r}\\2\cdot\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+3}+$$

. . . . . .

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -\overline{n-r}\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r} \\ +\dfrac{\overline{n-r}\,.\,\overline{n-r-1}}{1.2}\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]\Big);$$

$m\ldots\ldots m-p+1$; qui eſt la probabilité cherchée.

## XCVIII.

*EXEMPLE.* Étant données 10 cartes différentes entre leſquelles on en diſtingue 6 qu'on nomme ſucceſſivement une à une, aſſignant à chacune une place déterminée; ſi enſuite on tire ſucceſſivement une à une 8 des cartes données, & qu'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve 4 juſte de celles qu'on a diſtinguées, chacune à la place du tirage qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré; dans l'expreſſion générale trouvée par le Problême 8e. je fais $m=10$, $p=8$, $n=6$, $r=4$, & elle devient . . . . . .

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\Big[1.(1).4.3.2.1 + 4.\left(\begin{matrix}1.4\\-1\end{matrix}\right).4.3.2 + 1.\left(\begin{matrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{matrix}\right).4.3\Big]:$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3 =$$

$$\frac{3780}{1814400} = \frac{1}{480}.$$

Si l'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve au moins 4 des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, je fais les ſubſtitutions ci-deſſus dites dans la formule générale trouvée par le Problême 9e. & elle devient

$$\frac{6.5}{1.2}\cdot\Big[1.(1).4.3.2.1+2.\begin{pmatrix}1.4\\-1\end{pmatrix}.4.3.2$$

$$+1\begin{pmatrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{pmatrix}.4.3\Big].+$$

$$\Big[1.(1).4.3.2+.1\begin{pmatrix}1.3\\-1\end{pmatrix}.4.3\Big]+$$

$$.\Big[1.(1).4.3\Big]\Big\}:10.9.8.7.6.5.4.3=$$

$$\frac{80+288+12}{1814400}=\frac{85}{37800}.$$

Enfin, si l'on desire que dans les 8 cartes tirées s'en trouve au plus 3 des nommées, chacune à place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré, je fais les substitutions dessus dites dans la formule générale donnée par le Problême 10e. & elle devient

$$1.\Big(15.\begin{Bmatrix}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{Bmatrix}.4.3.2.1-$$

$$6.\begin{Bmatrix}1.4.5.6.7.8\\-5.4.5.6.7\\+10.4.5.6\\-10.4.5\\+5.4\\-1\end{Bmatrix}.4.3.2-$$

$$1.\begin{Bmatrix}1.3.4.5.6.7.8\\-6.3.4.5.6.7\\+15.3.4.5.6\\-20.3.4.5\\+15.3.4\\-6.3\\+1\end{Bmatrix}.4\ldots$$

$$.6.\Big(10.\begin{Bmatrix}1.5.6.7\\-3.5.6\\+3.5\\-1\end{Bmatrix}.4.3.2.1+$$

$$5.\left\{\begin{matrix}1.4.5.6.7\\-4.4.5.6\\+6.4.5\\-4.4\\+1\end{matrix}\right\}.4.3.2+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.3.4.5.6.7\\-5.3.4.5.6\\+10.3.4.5\\-10.3.4\\+5.3\\-1\end{matrix}\right\}.4.3)$$

$$+15.(6.\left\{\begin{matrix}1.5.6\\-2.5\\+1\end{matrix}\right\}.4.3.2.1+$$

$$4.\left\{\begin{matrix}1.4.5.6\\-3.4.5\\+3.4\\-1\end{matrix}\right\}.4.3.2+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.3.4.5.6\\-4.3.4.5\\+6.3.4\\-4.3\\+1\end{matrix}\right\}.4.3)$$

$$+20.(3.\left\{\begin{matrix}1.5\\-1\end{matrix}\right\}.4.3.2.1+$$

$$3.\left\{\begin{matrix}1.4.5\\-2.4\\+1\end{matrix}\right\}.4.3.2+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.3.4.5\\-3.3.4\\+3.3\\-1\end{matrix}\right\}.4.3)]:10.9.8.7.6.5.4$$

$$=\frac{982182+615168+180180+32160}{1814400}$$

$$=\frac{37715}{37800}.$$

CHAPITRE I

# CHAPITRE IV.

## *De la Probabilité des Hazards dans le cas de pluſieurs épreuves.*

### §. XCIX.

Soit qu'un hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'une ſeule d'entre les chances dépendantes d'un état de choſes donné ; ſoit que ce hazard conſiſte dans l'arrivée d'un certain nombre de ces chances, ou ſimultanée, ou ſucceſſive en un ordre quelconque ; ſoit que ce hazard conſiſte dans l'arrivée ſucceſſive d'un certain nombre d'entre ces chances en un ordre déterminé ; ſoit enfin que la probabilité de ce hazard ſoit ſimple, ou qu'elle ſoit compoſée de pluſieurs autres probabilités : la probabilité de ce hazard peut toujours être repréſentée par l'expreſſion générale $\frac{n}{m}$, dont le dénominateur $m$ exprimera le nombre total des chances, & le numérateur $n$ le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent le hazard ſpécifié. Or, dans toutes ces hypotheſes, il peut arriver deux cas : ou bien l'acte duquel dépend le hazard ſpécifié n'a lieu qu'une ſeule fois ; & nous avons, dans les chapitres précédents, déterminé d'une maniere générale quelle eſt dans ce cas la probabilité du hazard ſpécifié : ou bien l'acte duquel dépend ce hazard eſt réitéré un certain nombre $N$ de fois ; ou ce qui eſt de même, il y a un nombre $N$ d'épreuves (XVI.) de cet acte : il s'agit de déterminer dans ce 2e. cas la

probabilité du hazard ſpécifié, dont la probabilité en une ſeule épreuve, eſt repréſentée par $\frac{n}{m}$: ce ſera la matiere de ce chapitre.

## C.

*THÉORÊME I^er.* Nommant $m$ le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, dans le cas d'une ſeule épreuve: Je dis que le nombre des chances dépendantes du même acte, mouvement, ou état de choſes dans le cas d'un nombre $N$ d'épreuves, eſt $m^N$.

*DÉMONST.* Suppoſant qu'il n'y a que deux épreuves; chacune des $m$ chances données peut arriver à la premiere épreuve; & quelle que ſoit la chance arrivante à la premiere épreuve, chacune des $m$ chances données peut arriver à la ſeconde épreuve: ainſi nommant $a, b, c, d, —$ les $m$ chances données, toutes les chances poſſibles dans le cas de 2 épreuves ſeront répréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt $m^2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a\,a$ | $b\,a$ | $c\,a$ | $d\,a$ | — |
| $a\,b$ | $b\,b$ | $c\,b$ | $d\,b$ | — |
| $a\,c$ | $b\,c$ | $c\,c$ | $d\,c$ | — |
| $a\,d$ | $b\,d$ | $c\,d$ | $d\,d$ | — |
| — | — | — | — | — |

De même, quelles que ſoient les chances arrivantes aux deux premieres épreuves, chacune des $m$ chances données peut arriver à la 3^e. épreuve, & les chances, dans le cas de 3 épreuves, ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt $m^3$.

la différence de l'unité à la probabilité de ce hazard en une seule épreuve, élevée à la puissance du degré exprimé par le nombre des épreuves.

Ainsi nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité du hazard en une seule épreuve, $N$ le nombre des épreuves, $P$ la probabilité du même hazard dans le nombre d'épreuves exprimé par $N$; on a

$$P = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N.$$

*DEM.* On vient de voir (CI.) qu'en supposant que la probabilité du hazard dans le cas d'une seule épreuve est $\frac{n}{m}$, & que le nombre des épreuves est $N$; la probabilité que le hazard n'arrivera dans aucune des $N$ épreuves, est $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$: donc la probabilité de l'effet contraire, c'est-à-dire, la probabilité que le hazard dont il s'agit, arrivera dans quelqu'une des $N$ épreuves, est $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$. (XIV & XV.) *.C.Q.F.D.*

## CIV.

*COROLL. I.* Étant donnée la probabilité d'un hazard en une seule épreuve, on en déduira la probabilité de ce même hazard dans un nombre déterminé $N$ d'épreuves ; par conséquent le rapport des mises qu'on peut équitablement parier pour & contre ce hazard, & le nombre d'épreuves qui sont nécessaires pour qu'il puisse être parié avec avantage à mises égales que ce hazard arrivera :

*Par exemple :* la probabilité d'amener un doublet par le jet de 2 dés à jouer étant $\frac{1}{6}$ ; la probabilité d'amener doublet

en $\left\{\begin{array}{l}2\\3\\4\\\&c.\end{array}\right.$ jets, eſt $\left\{\begin{array}{l}1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\\1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\\1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\\\&c.\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{36}\\\frac{91}{216}\\\frac{671}{1296}\\\&c.\end{array}\right.$ ;

d'où l'on voit, qu'on peut parier avec quelqu'avantage, à miſes égales, d'amener doublet en 4 jets de dés, parce que $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$; & que pour parier équitablement d'amener doublet en $\left\{\begin{array}{l}2\\3\\4\end{array}\right.$ jets, il faut que les miſes ſoient entr'elles

$:: \left\{\begin{array}{l}11 : 25\\91 : 125\\671 : 625\end{array}\right\}$ (XVIII.).

## C V.

*Coroll. II.* De ces trois quantités : la probabilité d'un hazard en une ſeule épreuve, le nombre des épreuves, & la probabilité du hazard en ce nombre d'épreuves, deux étant données, déterminent la 3e ; car de l'égalité $P = 1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$, on déduit $\frac{n}{m} = 1-\sqrt[N]{1-P}$, & $N = \frac{log.\,(1-P)}{log.\,\left(1-\frac{n}{m}\right)}$.

## C V I.

*Coroll. III.* Si $n = \frac{m}{2}$ : ce qui eſt le cas du pari équitable à miſes égales, en une ſeule épreuve; la probabilité du même hazard en un nombre donné $N$ d'epreuves, ſera $1-\frac{1}{2^N}$ ; car alors la quantité $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$ devient $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^N$, ou $1-\left(\frac{1}{2}\right)^N$, ou $1-\frac{1}{2^N}$.

## CVII.

*COROLL. IV.* Si le nombre $N$ des épreuves eſt infini, la fraction $(1-\frac{n}{m})^N$ devient infiniment petite ou nulle ; & alors $P=1$ : d'où l'on voit que le hazard le moins probable dans une ſeule épreuve, ou même dans un nombre fini d'épreuves, devient certain en ſuppoſant le nombre des épreuves infini.

## CVIII.

*COROLL. V.* Si $P$ ou $1-(1-\frac{n}{m})^N=\frac{1}{2}$ ; on aura $\frac{n}{m}=1-\frac{1}{\sqrt[N]{2}}$ ; d'où l'on voit que ſi un hazard acquiert dans un nombre donné d'épreuves la probabilité $\frac{1}{2}$, la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt incommenſurable :

Et réciproquement, que ſi la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt commenſurable, ce hazard ne peut acquérir exactement la probalité $\frac{1}{2}$ dans un nombre entier déterminé d'épreuves.

## CIX.

*THÉORÊME III.* Suppoſant 1°. que deux hazards différents dépendent d'un même acte ou état de choſes donné ; 2°. que $n$ eſt le nombre des chances qui donnent le 1^er^. de ces hazards en une ſeule épreuve, que $p$ eſt le nombre des chances qui donnent le 2^e^. hazard en une ſeule épreuve ; 3°. qu'aucune de ces chances ne donne les deux hazards à la fois : Je dis que le nombre de manieres d'avoir $M$ fois juſte le 1^er^. hazard, & $P$ fois juſte le 2^e^. hazard dans un nombre $\overline{M+P}$ d'épreuves, eſt

$$\frac{\overline{M+P}.....\overline{M+1}}{1.2.....P}\cdot n^M.p^P.$$

*DEM.* Nommant $a$, $b$, $c$, $d$, — les $n$ chances qui donnent le 1^er^. hazard dans le cas d'une ſeule épreuve, $a^1$, $b^1$, $c^1$, $d^1$ — les $p$ chances qui donnent le 2^e^. hazard dans le cas d'une ſeule épreuve ; on vient de voir, par le Théorême 1^er^, que le nombre de manieres dont le 1^er^. hazard peut toujours arriver en $M$ épreuves eſt $n^M$, & que le nombre de manieres dont le 2^e^. hazard peut toujours arriver en $P$ épreuves, eſt $p^P$.

Or ſi $P = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdots \\ P \end{cases}$ ; les $\begin{cases} 1 \\ 1 \text{ ou } 2 \\ 1, 2 \text{ ou } 3 \\ 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \cdots\cdots \\ 1, 2, 3 \ldots \text{ ou } P \end{cases}$

chances qui compoſent chacune des

$\begin{cases} p \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \\ \cdots\cdots \\ p^P \end{cases}$ manieres, dont quelques unes d'entre les $p$

chances $a^1$, $b^1$, $c^1$ $d^1$, — peuvent toujours arriver en

$\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdots \\ P \end{cases}$ épreuves, peuvent ſans aucune interruption

d'ordre entr'elles, être mêlées avec les chances qui donnent le 1^er^. hazard, & arriver dans les

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1,\ 2^e,\ 3^e,\ 4^e,\ \text{—}\quad M+1^e. \\ 1^e \text{ \& } 2^e,\ 1^e \text{ \& } 3^e,\ 1^e \text{ \& } 4^e,\ \text{—}\quad 1^e \text{ \& } \overline{M+2}^e. \\ \qquad 2^e \text{ \& } 3^e,\ 2^e \text{ \& } 4^e,\ \text{—} \\ \qquad\qquad 3^e \text{ \& } 4^e,\ \text{—} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{—} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1^e, 2^e \text{ \& } 3^e;\ 1^e, 2^e \text{ \& } 4^e;\ \text{—} \\ \qquad\qquad 1^e, 3^e \text{ \& } 4^e;\ \text{—} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{—} \\ \qquad\qquad 2^e, 3^e \text{ \& } 4^e;\ \text{—} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{—} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad 1^e, 2^e, 3^e \text{ \& } 4^e;\ \text{—} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{=} \end{array}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{=} \end{array}\right.$$

épreuves; ce qui peut ſe faire de

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{M+1} \\ \dfrac{\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2} \\ \dfrac{\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3} \\ \dfrac{\overline{M+4}.\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3.4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\overline{M+P}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots P}\ ; \end{array}\right\} \text{manieres;}$$

donc le nombre de manieres dont le 1er. hazard peut arriver $M$ fois, & le 2e. $P$ fois dans $\overline{M+P}$ épreuves eſt $\dfrac{\overline{M+P}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots P} \cdot n^M.p^P$; *C.Q.F.D.*

Comme cette démonſtration pourroit paroître trop abſtraite à quelques lecteurs; pour la rendre plus ſenſible, je l'applique à un cas particulier.

Je ſuppoſe que $n = 3$, $p = 4$, $M = 3$, $P = 2$; toutes les manieres dont le 1er hazard peut arriver en trois épreuves ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante:

$a\,a\,a$ $b\,a\,a$ $c\,a\,a$
$a\,a\,b$ $b\,a\,b$ $c\,a\,b$
$a\,a\,c$ $b\,a\,c$ $c\,a\,c$
$a\,b\,a$ $b\,b\,a$ $c\,b\,a$
$a\,b\,b$ $b\,b\,b$ $c\,b\,b$
$a\,b\,c$ $b\,b\,c$ $c\,b\,c$
$a\,c\,a$ $b\,c\,a$ $c\,c\,a$
$a\,c\,b$ $b\,c\,b$ $c\,c\,b$
$a\,c\,c$ $b\,c\,c$ $c\,c\,c$

qui ſont au nombre de $3^3$.

Toutes les manieres d'amener le 2e. hazard en 2 épreuves ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante,

$a^1\,a^1$ $b^1\,a^1$ $c^1\,a^1$ $d^1\,a^1$
$a^1\,b^1$ $b^1\,b^1$ $c^1\,b^1$ $d^1\,b^1$
$a^1\,c^1$ $b^1\,c^1$ $c^1\,c^1$ $d^1\,c^1$
$a^1\,d^1$ $b^1\,d^1$ $c^1\,d^1$ $d^1\,d^1$

qui ſont au nombre de $4^2$.

Mais chacune des manieres d'amener le 1er. hazard trois fois peut être combinée avec chacune des manieres d'amener le 2e hazard deux fois, de $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ manieres ; car le terme $b\,a\,c$, entr'autres, peut ſans interruption d'ordre, être combiné avec le terme $b^1\,d^1$ des $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ manieres ſuivantes

$b^1\,d^1\,b\,a\,c$ $b^1\,b\,d^1\,a\,c$ $b^1\,b\,a\,d^1\,c$ $b^1\,b\,a\,c\,d^1$
$b\,b^1\,d^1\,a\,c$ $b\,b^1\,a\,d^1\,c$ $b\,b^1\,a\,c\,d^1$
$b\,a\,b^1\,d^1\,c$ $b\,a\,b^1\,c\,d^1$
$b\,a\,c\,b^1\,d^1$

Il en eſt de même de la combinaiſon de chacun des termes de la 1re. table avec chacun des termes de la 2e : d'où l'on voit que le nombre des manieres d'avoir le 1er. hazard trois fois & le 2e hazard deux fois en cinq épreuves, eſt $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3^3 \cdot 4^2$.

## C X.

*Corollaire I^er.* Si d'un même acte ou état de choſes donné dépendent trois hazards différents : que $\left\{\begin{matrix} n \\ p \\ q \end{matrix}\right.$ ſoit le nombre des chances qui donnent en une ſeule épreuve le $\left\{\begin{matrix} 1^{er.} \\ 2^{e.} \\ 3^{e.} \end{matrix}\right.$ hazard, ſans qu'il y ait aucune de toutes ces chances qui donnent pluſieurs des hazards à la fois : je dis que le nombre des manieres également poſſibles dont en $\overline{M+P+Q}$ épreuves le 1^er hazard peut arriver $M$ fois juſte, le 2^e $P$ fois, le 3^e $Q$ fois, eſt $\frac{\overline{M+P+Q}.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{P+Q}}$. $\frac{\overline{P+Q}.....\overline{P+1}}{1.2.....Q}.n^M.p^P.q^Q$ ; car, comme on vient de le voir, le nombre de manieres dont le 2^e hazard peut arriver $P$ fois & le 3^e $Q$ fois en $\overline{P+Q}$ épreuves eſt $\frac{\overline{P+Q}.....\overline{P+1}}{1.2.....Q}.p^P.q^Q$ ; le nombre des manieres dont le 1^er hazard peut toujours arriver en $M$ épreuves eſt $n^M$ ; & chacune des $n^M$ manieres d'avoir $M$ fois le 1^er hazard en $M$ épreuves, peut ſe combiner ſans interruption d'ordre, avec chacune des manieres d'amener le 2^e hazard $P$ fois & le 3^e $Q$ fois en $\overline{P+Q}$ épreuves, de $\frac{\overline{M+P+Q}.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{P+Q}}$ manieres ; donc, &c.

Il eſt facile, en ſuivant le même raiſonnement, de faire voir que s'il y a 4 hazards dont les probabilités ſoient entr'elles comme $n$, $p$, $q$ & $r$ ; le nombre de manieres également poſſibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R}$ épreuves le 1^er. hazard $M$ fois, le 2^e. $P$ fois, le 3^e. $Q$ fois, le 4^e. $R$ fois, eſt

$$\frac{\overline{M+P+Q+R}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{P+Q+R}} \cdot \frac{\overline{P+Q+R}\ldots\ldots\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{Q+R}} \cdot \frac{\overline{Q+R}\ldots\ldots\overline{Q+1}}{1.2\ldots\ldots R} \cdot n^M \cdot p^P \cdot q^Q \cdot r^R,$$

ainſi de ſuite : d'où l'on conclura qu'en général, s'il y a un certain nombre de hazards dépendants d'un même acte ou état de choſes donné dont les probabilités ſoient entr'elles comme $n, p, q, r, s\ldots$; le nombre de manieres également poſſibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R+S}\ldots\ldots$ épreuves $M$ fois le 1^er^. hazard, $P$ fois le 2^e^. $Q$ fois le 3^e^. $R$ fois le 4^e^. $S$ fois 5^e^. &c. eſt

$$\frac{\overline{M+P+Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{P+Q+R+S+\ldots\ldots}} \cdot \frac{\overline{P+Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{Q+R+S+\ldots\ldots}} \cdot \frac{\overline{Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{Q+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{R+S+\ldots\ldots}} \cdot \frac{\overline{R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{R+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{S+\ldots\ldots}} \times\ldots\ldots\times n^M \cdot p^P \cdot q^Q \cdot r^R \cdot s^S \times\ldots\ldots\ldots$$

## CXI.

*COROLL. II.* Si pluſieurs hazards dépendent d'un même acte mouvement ou état de choſes donné; que $\begin{cases} n \\ p \\ q \\ \ldots \end{cases}$ ſoit le nombre des chances qui donnent en une ſeule épreuve le $\begin{cases} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ \ldots \end{cases}$ de ces hazards, & qu'aucune chance ne donne pluſieu-

à la fois; que $m$ ſoit le nombre des chances dépendantes de l'acte, mouvement ou état de choſes donné; la probabilité d'avoir dans $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$ épreuves, $M$ fois le 1^er^. hazard, $P$ fois le 2^e^. $Q$ fois le 3^e^. &c. eſt

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots\ldots\overline{P+Q+\ldots\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{P+1}}{1.2.\ldots\ldots\overline{Q+\ldots\ldots}}$$

$$\times\ldots\ldots\times n^M.p^P.q^Q\times\ldots\ldots\times\frac{1}{m^{M+P+Q+\ldots\ldots}}$$

Si le nombre total des épreuves eſt $N$ nombre plus grand que $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$; cette probabilité ſera

$$\frac{N\ldots\ldots\overline{M+P+Q+\ldots+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P-Q-\ldots}}\cdot\frac{\overline{m-n-p-q-\ldots}}{\overline{N-M-P-Q-\ldots}}\times$$

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots\overline{P+Q+\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\overline{Q+\ldots}}\times\ldots\times$$

$$n^M.p^P.q^Q.\times\ldots\ldots\times\frac{1}{m^N}.$$

car les $\overline{m-n-p-q-\ldots\ldots}$ chances qui ne donnent aucun des hazards ſpécifiés, peuvent arriver dans les $\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots}$ épreuves, où l'on ne demande aucun de ces hazards de

$$\frac{\overline{m-n-p-q-\ldots\ldots}}{\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots\ldots}}$$ manieres

également poſſibles (C.): & chacune de ces manieres peut, ſans aucune interverſion d'ordre, être combinée avec chacune des

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots\overline{P+Q+\ldots\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2.\ldots\overline{Q+\ldots\ldots}}\times$$

$\ldots\times n^M.p^P.q^Q.\times\ldots$ manieres d'avoir le réſultat demandé, de $\frac{N\ldots\overline{M+P+Q+\ldots+1}}{1.2.\ldots\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots}}$ manieres.

## CXII.

*EXEMPLES.* Je jette 20 fois de ſuite ſur une table un dé à jouer ordinaire : pour avoir la probabilité d'amener dans les 20 jets, $\left\{\begin{matrix}3\\5\\2\\4\\5\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale ci-deſſus je fais $N=20$, $M=3$, $P=5$, $Q=2$, $R=4$, $S=5$, $T=1$; $m=6$; $n=p=q=r=s=t=1$; & elle devient

$$\frac{20.....4}{1.2....17}\cdot\frac{17.....6}{1.2....12}\cdot\frac{12.....3}{1.2....10}\cdot\frac{10.....5}{1.2.....6}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{6^{20}}$$

$$=\frac{18.19.20}{1.2.3}\cdot\frac{13.14.15.16.17}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{11.12}{1.2}\cdot\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{6^{19}}$$

$=\frac{56581525}{352638738432}$, qui eſt la probabilité cherchée.

Je jette 8 fois de ſuite ſur une table 2 dés à jouer ordinaires : pour avoir la probabilité d'amener $\left\{\begin{matrix}2\\2\\1\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}5\ \&\ 4\\3\ \&\ 2\\\text{fonnet}\\\text{quine}\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale je fais $N=8$, $M=2$, $P=2$, $Q=1$, $R=1$; $m=36$; $n=2$, $p=2$, $q=1$, $r=1$; & elle devient

$$\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{2}{1}\cdot 2^2.2^2.30^2.\frac{1}{36^8}=$$

$\frac{875}{34012224}$, qui eſt la probabilité cherchée.

## CXIII.

*THÉORÊME. IV.* La probabilité d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve étant $\frac{n}{m}$; la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois $M$

juſte dans un nombre $N$ d'épreuves, eſt

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot\frac{n^M}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{\overline{N-M}}.$$

*Dem.* 1°. Dans la formule générale $\frac{\overline{M+P}....\overline{M+1}}{1.2.....P}\cdot n^M.p^P$ trouvée par le Théorême précédent, ſi je ſubſtitue $\overline{m-n}$ à $p$ & $\overline{N-M}$ à $P$; j'aurai

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{N-M}}\cdot n^M.\overline{m-n}^{\overline{N-M}} \text{ ou}$$

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot n^M.\overline{m-n}^{\overline{N-M}}$$

(XXXII, XXXIV.) pour le numérateur de la probabilité dont il s'agit.

2°. Le dénominateur de la probabilité cherchée eſt $m^N$ (C.); donc cette probabilité eſt

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot\frac{n^M}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{\overline{N-M}}: C.\,Q.\,F.\,D.$$

## CXIV.

*Exemple.* Si l'on demande quelle eſt la probabilité d'amener deux fois ſeulement le point 5 & 4 en quatre jets de deux dés à jouer ordinaires: dans l'expreſſion générale ci-deſſus je fais $N=4$, $M=2$, $m=36$, $n=2$, & elle devient $\frac{4\cdot3}{1.2}\cdot\frac{2^2}{36^4}\cdot34^2=\frac{289}{17496}$. qui eſt la probabilité cherchée.

## CXV.

*Théorême V.* Repréſentant par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve: la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois $\overline{M-1}$ au plus, en un nombre $N$ d'épreuves, eſt

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2\right.$$
$$+\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^3+\ldots\ldots+$$
$$\left.\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

*DEM.* J'aurai la probabilité dont il s'agit en substituant dans la formule trouvée au Théorême précédent, à la quantité $M$ tous les nombres entiers depuis $o$ jusqu'à $\overline{M-1}$ inclusivement, & prenant la somme de tous les produits, qui sera

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

*C. Q. F. D.*

## CXVI.

*EXEMPLE.* Si je prends 3 des numéros de la lotterie royale de France: pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront une fois au plus dans l'un des 4 tirages prochains; dans l'expression générale ci-dessus je substitue 1 à $n$; 11748 à $m$; (LI.) 4 à $N$; 2 à $M$; & elle devient

$$\left(\frac{11747}{11748}\right)^4\left\{1+4.\frac{1}{11747}\right\}=\frac{\overline{11747}^3}{\overline{11748}^4}.11751$$
$$=\frac{634942617212499 1}{634942644812467 2}.$$

## CXVII.

*THÉORÊME VI.* Représentant toujours par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une seule épreuve: la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois $M$ au moins en un nombre $N$ d'épreuves, est

1 –

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\};$$

*Démonst.* Pour avoir la probabilité dont il s'agit, il faut retrancher de l'unité la formule générale du Théorême précédent : donc, &c. *C. Q. F. D.*

## CXVIII.

*Coroll.* Si $M=1$, l'expreſſion générale qui vient d'être trouvée ſe réduit à $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$, laquelle a deja été démontrée au Théorême 2e. & ſi $M=N$, cette même formule devient

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{\left(1+\frac{n}{m-n}\right)^N-\left(\frac{n}{m-n}\right)^N\right\}$$

( Formule de Newton pour les puiſſances )

$$=1-\frac{\overline{m-n}^N}{m^N}\cdot\frac{m^N-n^N}{\overline{m-n}^N}=1-\frac{m^N-n^N}{m^N}=\left(\frac{n}{m}\right)^N;$$

propoſition déja démontrée ci-deſſus (XXVI & CI.).

## CXIX.

*Remarque Ire.* Si dans la formule générale du Théorême 4e. on eut ſubſtitué ſucceſſivement à $M$ tous les nombres entiers depuis $M$ juſqu'à $N$ inclusivement, & qu'on eut pris la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions : on auroit eu

$$\left(\frac{n}{m}\right)^N\cdot\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots+\frac{N,\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2.\ldots\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{N-M}}\right\},$$

expreſſion qui équivaut à celle du Théorême 6e. quoique ſous une forme différente : & ſi on retranche de l'unité cette derniere expreſſion ; on aura

$$1-\left\{\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{N-M}\right\}$$

expreſſion équivalente à celle qui a été démontrée au Théorême 5e.

CXX.

*REMARQUE II.* Connoiſſant la probabilité $\frac{n}{m}$ d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve, & la probabilité $P$ que ce même hazard arrivera un nombre connu $\left\{\begin{matrix} M \text{ juſte} \\ M-1 \text{ au plus} \\ M \text{ au moins} \end{matrix}\right\}$ de fois dans un nombre inconnu $N$ d'épreuves : pour connoître le nombre $N$ d'épreuves au moyen deſquelles ce hazard acquiert la probabilité $P$ d'arriver $\left\{\begin{matrix} M \text{ fois juſte} \\ M-1 \text{ fois au plus} \\ M \text{ fois au moins} \end{matrix}\right\}$ : dans l'expreſſion générale démontrée au Théorême $\left\{\begin{matrix} 4^e \\ 5^e \\ 6^e \end{matrix}\right\}$ ; je ſubſtituerai ſucceſſivement à $N$, les nombres $M$, $M+1$, $M+2$, $M+3$, ainſi de ſuite, juſqu'à ce que cette expreſſion devienne égale à la fraction donnée $P$, ou la plus approchante qu'il ſera poſſible de la valeur de cette fraction. Par exemple : Si l'on demande en combien de jets de deux dés à jouer ordinaires, on peut parier équitablement, ou le plus équitablement qu'il ſera poſſible, à miſes égales, d'amener le point 7 au moins deux fois : dans l'expreſſion générale

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\cdot\left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

je ſubſtitue 2 à $M$, $\frac{1}{6}$ à $\frac{n}{m}$ ; elle devient $1-\left(\frac{5}{6}\right)^N\cdot\left(1+\frac{N}{5}\right)$ que j'égale à $\frac{1}{2}$. Dans cette derniere formule je ſubſtitue ſucceſ-

ſivement à $N$ les nombres entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. & cette dernière formule devient par ces ſubſtitutions

Si $N = 2$, $\frac{1}{36}$ ; Si $N = 3$, $\frac{2}{27}$ ;

Si $N = 4$, $\frac{19}{144}$ ; Si $N = 5$, $\frac{763}{3888}$ ;

Si $N = 6$, $\frac{12281}{46656}$ ; Si $N = 7$, $\frac{7703}{23328}$ ;

Si $N = 8$, $\frac{663991}{1579616}$ ; Si $N = 9$, $\frac{2304473}{5038848}$ ;

Si $N = 10$, $\frac{10389767}{20155392}$. D'où l'on voit qu'il y a quelque déſavantage de parier à miſes égales que le point 7 arrivera au moins 2 fois en 9 coups, & quelque avantage de parier la même choſe en 10 coups, & que le pari ne peut jamais être parfaitement équitable.

## CXXI.

Si $\left\{\begin{matrix}\frac{n}{m} \\ M\end{matrix}\right.$, $P$ & $N$ ſont connus & $\left\{\begin{matrix}M \\ \frac{n}{m}\end{matrix}\right.$ inconnue : on pourra trouver, par des ſubſtitutions ſucceſſives ſemblables, la valeur de l'inconnue : d'où l'on voit que de ces 4 quantités, ſavoir 1°. la probabilité qu'un hazard arrivera en une ſeule épreuve, 2°. la probabilité que ce hazard arrivera un certain nombre de fois juſte ou au moins ou au-plus en un certain nombre d'épreuves, 3°. le nombre de fois que le hazard doit probablement arriver, 4°. le nombre des épreuves ; trois étant données, on pourra toujours trouver la quatrième.

## CXXII.

*PROBLÊME.* Suppoſant 1°. que $m$ eſt le nombre total des chances dépendantes d'un état de choſes

donné, 2°. que $\frac{n}{m}$ & $\frac{p}{m}$ ſont les probabilités en une ſeule épreuve de deux hazards dépendants de ce même état de choſes, 3°. que $\varphi$ eſt le nombre des chances qui donnent ces deux hazards à la fois, 4°. que $\left\{\begin{matrix} y, n-\varphi \\ z, p-\varphi \end{matrix}\right.$ eſt le nombre des chances qui donnent le $\left\{\begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \end{matrix}\right.$ hazard ſans donner le $\left\{\begin{matrix} 2^{e}. \\ 1^{er}. \end{matrix}\right\}$, & que $u, m-n-p+\varphi$ eſt le nombre des chances qui ne donnent aucun des 2 hazards: on demande quelle eſt la probabilité que dans un nombre $N$ d'épreuves, le 1er. hazard arrivera $M$ fois juſte, & le 2e. $P$ fois juſte.

*Solut.* 1°. Il peut ſe faire qu'il n'arrive aucune des $\varphi$ chances qui donnent les deux hazards à la fois; & dans ce cas, le nombre de manieres d'avoir $M$ fois le 1er. hazard, $P$ fois le 2e. & $N-M-P$ fois aucun des 2 hazards eſt (CX.)

$$\frac{\overline{N.....M+1}}{1.2....N-M}\cdot\frac{\overline{N-M.....P+1}}{1.2....N-M-P}\cdot y^{M}\cdot z^{P}\cdot u^{N-M-P}.$$

2°. Il peut ſe faire qu'il arrive en une épreuve une des $\varphi$ chances qui donnent les 2 hazards à la fois; & dans ce cas, chacune de ces $\varphi$ chances peut arriver à $N$ épreuves différentes: d'ailleurs le nombre de manieres d'avoir $M-1$ fois le 1er. hazard, & $P-1$ le 2e. eſt $\frac{\overline{N-1.....M}}{1.2....N-M}\cdot\frac{\overline{N-M.....P}}{1.2....N-M-P+1}\cdot y^{M-1}\cdot z^{P-1}\cdot u^{N-M-P+1}$ qu'il faut multiplier par $N\varphi$.

3°. Il peut ſe faire qu'une ou 2 des $\varphi$ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en 2 épreuves; & dans ce cas le nombre des manieres d'avoir le réſultat deſiré, eſt

$$\frac{N-2\ldots\ldots M-1}{1.2\ldots\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots\ldots P-1}{1.2\ldots\ldots N-M-P+2}\cdot y^{M-2}\,z^{P-2}\,u^{N-M-P+2}\cdot\frac{N.N-1}{1.2}\cdot\varphi^2$$

; ainſi de ſuite : & enfin

Il peut ſe faire que 1, 2, 3.... ou $P$ des $\varphi$ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en $P$ épreuves, que le 1$^{er}$. hazard ſeul arrive en $M-P$ épreuves, & aucun des 2 hazards dans les $N-M$ autres épreuves, ce qui peut arriver de

$$\frac{N-P\ldots M-P+1}{1.2\ldots\ldots N-M}\cdot y^{M-P}\,u^{N-M}\cdot\frac{N\ldots N-P+1}{1.2\ldots\ldots P}\cdot\varphi^P$$

manieres ; donc la probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{N\ldots M+1}{1.2\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P+1}{1.2\ldots N-M-P}\cdot y^{M-P}z^{P}u^{N-M-P}+\\ \frac{N-1\ldots M}{1.2\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P}{1.2\ldots N-M-P+1}\cdot y^{M-1}z^{P-1}u^{N-M-P+1}\cdot N\varphi+\\ \frac{N-2\ldots\ldots M-1}{1.2\ldots\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P-1}{1.2\ldots N-M-P+2}\cdot y^{M-2}z^{P-2}u^{N-M-P+2}\cdot\frac{N.N-1}{1.2}\cdot\varphi^2+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ \frac{N-P\ldots M-P+1}{1.2\ldots N-M}\cdot y^{M-P}u^{N-M}\cdot\frac{N\ldots N-P+1}{1.2\ldots P}\cdot\varphi^P\end{array}\right\}:m^N;$$

*C. Q. F. T.*

## CXXIII.

*EXEMPLE.* Si l'on demande quelle eſt la probabilité d'amener, en 8 jets de 2 dés à jouer ordinaires, 4 fois juſte le point 6, & 2 fois juſte un doublet : je fais dans la formule générale ci-deſſus $N=8$, $M=4$, $P=2$, $\varphi=1$, $m=36$, $z=5$, $u=6$,

& par conſéquent $y=4$, $z=5$, $u=26$: & elle devient $\left(\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{4.3}{1.2}.4^4.5^2.26^2+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.\frac{4.3.2}{1.2.3}.4^3.5^1.26^3.8.1+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.4^2.1.26^4.\frac{8.7}{1.2}.1\right):36^8.=\frac{10925005}{2754990144}$.

## CXXIV.

*REMARQUES.* 1°. Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à $M$ tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\M\end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{matrix}M\\N-P\end{matrix}\right\}$ inclu-ſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir $P$ fois juſte le 2e. hazard, & $M$ fois $\left\{\begin{matrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{matrix}\right.$ le 1er. hazard.

2°. Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à $P$ tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\P\end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{matrix}P\\N-M\end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions; on aura une formule $\left\{\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir $M$ fois juſte le 1er. hazard, & $P$ fois $\left\{\begin{matrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{matrix}\right.$ le 2e. hazard.

3°. Si dans la formule générale $A$ on ſubſtitue ſucceſſivement à $P$ tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\P\end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{matrix}P\\N-M\end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces

ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix} E \\ F \end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir $M$ fois au plus le 1^er^. hazard, & $P$ fois $\left\{\begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix}\right.$ le 2^e^. hazard.

4°. Si dans la formule générale $B$ on ſubſtitue ſucceſſivement à $P$ tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix} 0 \\ P \end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{matrix} P \\ N-M \end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme des produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix} G \\ H \end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir $M$ fois au moins le 1^er^. hazard, & $P$ fois $\left\{\begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix}\right.$ le 2^e^. hazard.

5°. Si dans les formules $C$ & $D$ on ſubſtitue ſucceſſivement à $M$ tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix} 0 \\ M \end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{matrix} M \\ N-P \end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura quatre nouvelles formules générales équivalentes aux formules $E$, $F$, $G$ & $H$.

## CXXV.

Si dans la formule générale $H$ on fait $M=1$ & $P=1$, elle ſe réduira à

$$\frac{u^N - \overline{m-n}^N - \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p+\mathbf{0}}^N}{m^N};$$

qui eſt la probabilité d'amener les 2 hazards au moins une fois chacun en un nombre $N$ d'épreuves.

## CXXVI.

*EXEMPLE.* Si on demande quelle eſt la probabilité d'amener au moins une fois le point 6 &

doublet en 4 jets de 2 dés à jouer ordinaires : dans la formule ci-dessus je fais $m=36$, $n=5$, $p=6$, $\varphi=1$, $\overline{m-n}=31$, $\overline{m-p}=30$, $\overline{m-n-p+\varphi}=26$, $N=4$, & elle devient $\frac{36^4-31^4-30^4+26^4}{36^4}=\frac{403071}{1679616}=\frac{134357}{559872}$.

## CXXVII.

Si l'on desire savoir en combien de jets de 2 dés à jouer ordinaires, on peut parier le plus équitablement qu'il est possible à mises égales d'amener le point 6 & un doublet : dans l'expression $\frac{36^N-31^N-30^N+26^N}{36^N}$ je substitue successivement à $N$ tous les nombres entiers 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à ce que cette quantité devienne la plus approchante qu'il est possible de la valeur $\frac{1}{2}$, & le nombre, qui étant substitué à $N$ remplira cette condition, sera le nombre cherché. Or je trouve, en faisant ce calcul, que si $N=8$, l'expression devient $\frac{1333128798591}{2821109907456}$ qui est un peu moindre que $\frac{1}{2}$ : & que si $N=9$, la même expression devient $\frac{55983592650721}{101559956668416}$ qui est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$ : d'où l'on voit qu'il y a quelque désavantage de parier à mises égales que le point 6 & un doublet arriveront en 8 jets ; & qu'il y a quelque avantage de parier aux mêmes conditions que ces deux hazards arriveront au moins une fois chacun en neuf coups de dés.

## CXXVIII.

Si l'on a 3 hazards dont les probabilités soient $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$, dépendants du même acte, mouve-

ment ou état de choſes donné; que $x$, $y$, $z$ ſoient le nombre des chances qui donnent le 1^er^, le 2^e^, le 3^e^. hazard ſeul; que $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$ ſoient le nombre des chances qui donnent le 1^er^. & le 2^e^. hazard à la fois, le 1^er^. & le 3^e^. hazard à la fois, le 2^e^. & le 3^e^. hazard à la fois, les 3 hazards à la fois, & qu'on deſire avoir la probabilité que dans $N$ épreuves, le 1^er^. hazard arrivera $M$ fois juſte, le 2^e^. hazard $P$ fois juſte, le 3^e^. hazard $Q$ fois juſte: on trouvera cette probabilité en raiſonnant comme on a fait dans le problême précédent d'après le §. CX.: mais on aura une expreſſion beaucoup plus compoſée, qui ſera, non pas une ſuite ſimple ni même une ſuite de ſuites, mais une ſuite de termes dont chacun ſera une ſuite de laquelle chaque terme ſera une ſuite de ſuites.

En effet: on aura d'abord, comme dans le problême précédent, une ſuite de termes dont chacun ſera l'expreſſion

$$\frac{N.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}....\overline{P+1}}{1.2.....\overline{N-M-P}}\cdot\frac{\overline{N-M-P}....\overline{Q+1}}{1.2....\overline{N-M-P-Q}}\cdot\frac{M\,P\,Q\,\overline{N-M-P-Q}}{x.y.z.u}$$

réguliérement modifiée; leſquels termes ſeront multipliés, le 1^er^. par 1, le 2^e^. par $N\varphi$, le 3^e^. par $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\varphi^2$, le 4^e^. par $\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}\varphi^3$, ainſi de ſuite, & enfin le dernier par $\frac{N....\overline{N-P+1}}{1.2.....P}\cdot\varphi^P$

Mais cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1^er^. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite réguliérement modifiée, ſeront ſucceſſivément multipliés par 1, $N\varphi'$, $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\varphi'^2$,....$\frac{N...\overline{N-Q+1}}{1.2.....Q}\cdot\varphi'^Q$.

De-là, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1^er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite régulièrement modifiée, ſeront multipliés ſucceſſivement par $1, N\varphi'', \frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\varphi''^{2}, \ldots \frac{N.....\overline{N-Q+1}}{1.2.....Q}\varphi''Q$.

De-là enfin, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1^er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite régulièrement modifiée, ſeront multipliés ſucceſſivement par $1, N\varphi''', \ldots\ldots \frac{N.....\overline{N-Q+1}}{1.2.....Q}.\varphi'''Q$.

Cette ſuite ainſi formée ſera le numérateur de la probabilité dont il s'agit, de laquelle $m^N$ eſt le dénominateur.

On pourra d'ailleurs, au moyen de cette derniere probabilité, trouver les probabilités que le 1^er. hazard arrivant $M$ fois juſte, ou au plus ou au moins, & le 2^e. $P$ fois juſte, au plus ou au moins, le 3^e. hazard arrivera $Q$ fois juſte, ou au plus ou au moins; ſuivant la méthode indiquée au §. CXXIV.

## CXXIX.

On pourroit étendre plus loin ces recherches, & trouver les probabilités d'avoir en $N$ épreuves, juſte, ou au moins ou au plus, $M$ fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, $P$ fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{p}{m}$, $Q$ fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{q}{m}$, $R$ fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{r}{m}$, $S$ fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{s}{m}$, &c. mais ces calculs meneroient fort

loin; il ſuffit d'en avoir montré à nos lecteurs l'uſage & de l'avoir mis à portée de les faire au beſoin: ſans le fatiguer inutilement par des propoſitions arides & trop compliquées.

## CXII.

Si l'on aſſigne à chacun des hazards déſignés le rang de l'épreuve à laquelle on veut qu'il arrive, la probabilité que les hazards déſignés arriveront chacun à l'épreuve qui lui a été aſſignée eſt compoſée des probabilités des hazards déſignés (XXIV. XXV. XXVI.). Si l'on demande, par exemple, que le hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$ arrive à la 1re. épreuve, celui dont la probabilité eſt $\frac{p}{m}$ à la 2e. épreuve, celui dont la probabilité eſt $\frac{q}{m}$ à la 3e. épreuve: la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{npq}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 ſeulement des trois hazards déſignés arrivent aux épreuves qui leur ont été aſſignées: la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{np.\overline{m-q}+nq.\overline{m-p}+pq.\overline{m-n}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'un ſeul des trois hazards déſignés arrive à l'épreuve qui lui a été aſſignée, la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{n.\overline{m-p}.\overline{m-q}+p.\overline{m-n}.\overline{m-q}+q.\overline{m-n}.\overline{m-p}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'aucun des 3 hazards déſignés n'arrive à l'épreuve qui lui a été aſſignée: la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{\overline{m-n}.\overline{m-p}.\overline{m-q}}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 au moins des 3 hazards déſignés arrivent aux épreuves qui leur ont été aſſignées; la probabilité de l'effet demandé eſt

$\frac{npq+np.\overline{m-q}+nq.\overline{m-p}+pq.\overline{m-n}}{m^3}$ ou

$\frac{mnp+q.(n.\overline{m-p}+p.\overline{m-n})}{m^3}$.

Si l'on demande qu'un au plus des 3 hazards désignés arrive à l'épreuve qui lui a été assignée : la probabilité de l'effet demandé est

$\frac{m.\overline{m-p}.\overline{m-q}+\overline{m-n}.(p.\overline{m-q}+q.\overline{m-p})}{m^3}$.

Si l'on demande que dans $N$ épreuves, deux au moins des trois hazards désignés arrivent aux épreuves qui leur ont été assignées, & qu'un 4^e. hazard dont la probabilité est $\frac{r}{m}$ arrive au moins une fois dans les $N-3$ autres épreuves : la probabilité de l'effet demandé sera

$\frac{mnp+q(n.\overline{m-p}+p.\overline{m-n})}{m^3}.\left\{1-\left(1-\frac{r}{m}\right)^{N-3}\right\}$;

ainsi des autres.

## CXXXI.

Si au lieu de réitérer, un nombre $N$ de fois consécutives, l'acte ou mouvement duquel dépendent les hazards ; on avoit ou si on produisoit en même temps un nombre $N$ d'actes ou mouvements semblables, la probabilité seroit la même, comme il est évident : ainsi, étant donné un hazard dont la probabilité est $\frac{n}{m}$, si on a ou si on produit en même temps un nombre $N$ d'actes ou mouvements pareils à celui dont ce hazard dépend ; la probabilité d'avoir ce hazard $M$ fois juste, est

$\frac{N.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}.\frac{n^M}{m^N}.\overline{m-n}^{\overline{N-M}}$ (CXIII.);

$M$ fois au moins, est

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}.\left(\frac{n}{m-1}\right)^{\overline{M-1}}\right\}\text{(CXVII.)};$$

*M* fois au plus, eſt

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots M}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^M\right\}\text{(CXV.)};$$

Une fois au moins, eſt $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$;

Une fois au plus, eſt $\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left(1+N\frac{n}{m-n}\right)$;

Une fois juſte, eſt $\frac{N}{1}.\frac{\overline{m-n}^{\overline{N-1}}.n}{m^N}$;

Étant donné 2 hazards dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, & le nombre des chances qui donnent les hazards à la fois $\varphi$; ſi l'on a ou ſi l'on produit en même temps un nombre *N* d'actes ou de mouvements pareils à celui dont ces 2 hazards dépendent:

La probabilité d'avoir ces deux hazards

le 1er. *M* fois juſte, & le 2e. *P* fois juſte, eſt l'expreſſion générale trouvée au §. CXXII.

Les probabilités d'avoir ces 2 hazards

le 1er. *M* fois $\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$ & le 2e. *P* fois juſte, ſeront les formules *A* & *B* (CXXIV.):

le 2e. *P* fois $\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$ & le 1er. *M* fois juſte, ſeront les formules *C* & *D* (ibid.);

le 1er. *M* fois au plus & le 2e. *P* fois (au plus / au moins) ſeront les formules *E* & *F*:

le 1er. *M* fois au moins & le 2e. *P* fois (au plus / au moins) ſeront les formules *G* & *H*:

au moins une fois chacun, ſera la formule $\frac{m^N - \overline{m-n}^N - \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p}^N}{m^N}$ (CXXV.).

Étant donnés autant de hazards qu'on voudra dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{q}{m}, \frac{r}{m}$ ....., & le nombre des chances qui donnent pluſieurs de ces hazards à la fois : ſi l'on produit en même temps un nombre *N* d'actes ou mouvements pareils à celui dont tous ces hazards dépendent : la probabilité d'avoir *M* fois juſte le 1er. hazard, *P* fois le 2e, *Q* fois le 3e, *R* fois le 4e,.... ſera la formule générale trouvée au §. CXI : ainſi, ſi je jette à la fois ſur une table 20 dés à jouer ordinaires; la probabilité d'amener 3 as, 5 deux, 2 trois, 4 quatre, 5 cinq & 1 ſix, eſt $\frac{5658525}{3526387843^2}$; (CXII.).

Si huit perſonnes jettent en même temps ſur une table, chacune 2 dés à jouer ordinaires, la probabilité que deux de ces perſonnes ſeulement ameneront le point 5 & 4, que deux ſeulement ameneront 3 & 2, qu'une ſeule amenera ſonnet, & qu'une ſeule amenera Quine, eſt $\frac{875}{3401^2 2^{24}}$. (Ibid.).

# CHAPITRE V.

## *De l'Évaluation des Probabilités par l'Analyſe des Queſtions propoſées.*

### §. CXXXII.

LA VARIÉTÉ infinie des queſtions qui peuvent être propoſées ſur les probabilités, ne permet pas d'aſſigner une regle univerſelle au moyen de laquelle on puiſſe évaluer exactement toutes les probabilités qu'on deſireroit de connoître : nous avons néanmoins établi dans les chapitres précédents des principes de la plus grande généralité, au moyen deſquels on réſoudra facilement une infinité de queſtions de cette eſpece, & ſpécialement la plupart de celles qui ont rapport aux jeux de hazard uſités : nous avons eu ſoin auſſi d'éclaircir ces principes par des exemples qui en montrent l'application : l'objet de ce chapitre eſt de familiariſer de plus en plus le lecteur avec l'uſage de ces principes, & de montrer, par la ſolution de quelques queſtions particulieres, comment on peut évaluer exactement les probabilités au moyen de l'analyſe & de la Géométrie, lorſque ces queſtions en ſont ſuſceptibles.

### CXXXIII.

QUESTION 1re. Je joue au Wisk, & je donne : on demande quelle eſt la probabilité que mon jeu ſera compoſé des 13 cartes de la couleur de la tourne ; ou ce qui eſt de même, que j'aurai à moi ſeul tous les atouts.

*SOLUT.* 1°. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'obſerve qu'en ſuppoſant que j'ai en main les 13 atouts, les 39 autres cartes peuvent être partagées entre les trois autres joueurs de $\frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$ manieres (XLV.) : donc ce nombre eſt le numérateur cherché.

2°. Pour avoir le dénominateur : j'obſerve que le nombre de manieres dont les 52 cartes du jeu peuvent être partagées en 4 parts égales aux quatre joueurs, eſt $\frac{52.....40}{1.2.....13} \cdot \frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$; qui eſt le dénominateur dont s'agit; donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2.....13}{52.....40} = \frac{1}{635013559600}$.

## CXXXIV.

QUESTION 2°. Je vais jouer au piquet contre Pierre : on demande quelle eſt la probabilité que j'aurai d'emblée les 4 tierces majors ſans écarter ni reprendre.

*SOLUT.* Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée; j'obſerve qu'en ſuppoſant que les 4 tierces majors m'arrivent en effet, les 20 cartes reſtantes peuvent être partagées entre Pierre & le talon, c'eſt-à-dire, en 2 parts, l'une de 12, l'autre de 8 cartes, de $\frac{20.....13}{1.2.....8}$ manieres : donc ce nombre eſt le numérateur cherché. Le dénominateur eſt le nombre de manieres dont 32 cartes peuvent être diſtribuées en 3 parts, deux de 12 & une de 8 cartes; c. à d. $\frac{32.....21}{1.2.....12} \cdot \frac{20.....13}{1.2.....8}$ (XLIII.); donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2.....12}{32.....21} = \frac{1}{225792840}$.

## CXXXV.

QUESTION 3°. Je donne les 4 tierces majors à Pierre contre qui je joue au piquet; & pour faire mon

mon jeu, je prends au hazard 12 cartes dans les 20 qui reſtent : on demande quelle eſt la probabilité qu'il me viendra d'emblée de quoi faire Pierre repic avant d'écarter ni regarder

*SOLUTION.* J'obſerve 1°. que je ne puis faire Pierre repic qu'au moyen de deux quintes valeſ : or dans les 20 cartes qui reſtent [illegible] Pierre prélevé, il ſe trouve 4 quintes valeſ [illegible] : avoir 2 de ces quintes baſſes au [illegible] différentes, parce qu'il y a [illegible] différentes de prendre 2 ſur 4 [illegible] quelque maniere que j'ai les 2 numéros qu'il me faut, il reſte 10 cartes ſur [illegible] 2 pour compléter mon jeu : or on a 2 ſur 10 de $\frac{10-10-2-1}{1.2}$ ou 45 manieres [illegible] 6. 45 eſt le numérateur de la probabilité cherchée.

2°. Le dénominateur eſt le nombre de maniere dont on peut prendre 12 ſur 20, c'eſt-à-dire, [illegible] donc la probabilité cherchée eſt 6 . 45 [illegible] $\frac{9}{4199}$.

## CXXXVI.

QUESTION 4e. Je joue contre Pierre au jeu nommé la Triomphe ; nous tenons chacun notre [illegible] main, & c'eſt un cœur qui tourne : j'ai deux [illegible] dans mon jeu : on demande quelle eſt pour [illegible] probabilité que Pierre a au moins [illegible] ſon jeu.

*SOLUT.* 1°. Pour avoir le numérateur [illegible] babilité demandée : j'obſerve que [illegible] des cartes il ſe trouve 8 cœurs, & que [illegible] il s'en trouve 2 dans mon jeu [illegible] n'y a donc que 5 cœurs qui puiſſent [illegible]

le jeu de Pierre: or pour ſavoir de combien de manieres Pierre peut avoir dans ſon jeu 3 au moins de ces 5 cœurs, la queſtion peut s'énoncer ainſi: ſur 26 cartes différentes j'en diſtingue 5, & l'on en tire 5; de combien de manieres entre les 5 cartes tirées, peut-il s'en trouver 3 au moins d'entre les 5 que j'ai diſtinguées? pour réſoudre cette queſtion, dans le numérateur de la formule générale du 5. LV. je fais $m=26, n=5, p=5, r=3$; & elle devient $1+5.21+\frac{5.4}{1.2}.\frac{21.20}{1.2}=2206$ qui ſera le numérateur de la probabilité demandée.

2°. Pour avoir le dénominateur, j'obſerve que le jeu de Pierre ne peut être pris que dans les 26 cartes que je ne connois point, car ni les cinq qui compoſent mon jeu ni la tourne ne peuvent en faire partie: la queſtion ſe réduit donc à ſavoir de combien de manieres on peut prendre 5 cartes ſur 26; or ce nombre de manieres eſt $\frac{26 \ldots\ldots 26-5+1}{1.2\ldots\ldots 5}$ $=65780$ qui ſera le dénominateur cherché. Donc la probabilité demandée eſt $\frac{2206}{65780}=\frac{1103}{32890}$.

## CXXXVII.

QUESTION 5e. Je joue au Wisk contre Pierre, Jacques & Jean, nous tenons chacun notre jeu en main, j'ai 4 cœurs dans mon jeu dont l'un eſt la tourne: on demande quelle eſt pour moi la probabilité que Pierre a dans ſon jeu 4 cœurs & Jacques 3 cœurs.

*SOLUT.* 1°. Pour ſavoir de combien de manieres le hazard déſigné peut avoir lieu, ou ce qui eſt de même, pour avoir le numérateur de la probabilité demandée, il s'agit de ſavoir d'abord de combien de manieres les 9 cœurs qui ne ſont pas dans mon jeu peuvent être diſtribués en 3 parts, l'une

de 4 pour Pierre, la ſeconde de 3 pour Jacques, & par conſéquent la troiſieme de 2 pour Jean. Or, pour avoir ce nombre de manieres, il faut dans la formule générale $\frac{\overline{m....m-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{\overline{m-p.....m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$ (XLIII.) faire $m=9$, $p=4$, $p'=3$, & elle devient $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3}$. Mais à chacune de ces manieres, les 30 cartes reſtantes doivent être diſtribuées en 3 parts, l'une de 9 cartes pour Pierre, la 2e. de 10 cartes pour Jacques, la 3e. de 11 cartes pour Jean, ce qui peut ſe faire de $\frac{30.....22}{1.2.....9} \cdot \frac{21.....12}{1.2.....10}$ manieres; donc le numérateur de la probabilité cherchée eſt $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{30.....22}{1.2.....9} \cdot \frac{21.....12}{1.2.....10}$.

2°. Le dénominateur eſt le nombre de manieres dont les 39 cartes qui ne ſont pas dans mon jeu peuvent être diſtribuées en 3 parts égales entre Pierre Jacques & Jean: or le nombre de manieres dont 39 cartes peuvent être partagées en 3 parties égales, eſt $\frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$; & à chacune de ces manieres les 3 parts peuvent être réparties entre Pierre Jacques & Jean de 1.2.3 ou 6 manieres (LXIV); car Pierre ayant la $\left\{\begin{matrix}1^{e.}\\2^{e.}\\3^{e.}\end{matrix}\right.$ part, Jacques peut avoir la $\left\{\begin{matrix}\binom{2^{e.}}{3^{e.}} & \binom{3^{e.}}{2^{e.}}\\ \binom{1^{e.}}{3^{e.}} & \binom{3^{e.}}{1^{e.}}\\ \binom{1^{e.}}{2^{e.}} & \binom{2^{e.}}{1^{e.}}\end{matrix}\right.$ & Jean la : donc le dénominateur de la probabilité cherchée eſt $6 \cdot \frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$. donc cette probabilité eſt

$$\frac{9\ldots\ldots6}{1\ldots\ldots4}\cdot\frac{5\ldots\ldots3}{1\ldots\ldots3}\cdot\frac{30\ldots22}{1\ldots\ldots9}\cdot\frac{21\ldots12}{1\ldots10}:6\cdot\frac{39\ldots\ldots27}{1\ldots\ldots13}\cdot\frac{26\ldots\ldots14}{1\ldots\ldots13}$$
$$=\frac{9295}{740962}.$$

## CXXXVIII.

QUESTION 6e. Je prends un des 90 numéros de la Lotterie royale de France par extrait ſimple, ou bien 2 numéros par ambe ſimple, ou bien 3 par terne, ou 4 par quaterne, ou 5 par quine, ou 1 par extrait déterminé, ou 2 par ambe déterminé: on demande 1°. quelle eſt dans chacun de ces cas la probabilité que tous mes numéros arrivent dans le prochain tirage; 2°. combien de fois la Lotterie devroit me rendre équitablement ma miſe en cas que mes numéros arrivent; 3°. quelle eſt pour chacun de ces cas l'avantage que la Lotterie a ſur moi dans ſes conditions actuelles.

*SOLUT.* En premier lieu : dans la formule générale du §. LI. Je fais $m=90$, $p=5$; & je ſubſtitue ſucceſſivement à $r$, les nombres 1, 2, 3, 4 & 5; par quoi cette formule devient

Pour le 1er. cas, $\frac{89\ldots\ldots86}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.2.3.4.5}{90\ldots\ldots86}=\frac{1}{18}$,

Pour le 2e. cas, $\frac{88.87.86}{1.2.3}\cdot\frac{1.2.3.4.5}{90\ldots\ldots86}=\frac{2}{801}$,

Pour le 3e. cas, $\frac{87.86}{1.2}\cdot\frac{1.2.3.4.5}{90\ldots\ldots86}=\frac{1}{11748}$,

Pour le 4e. cas, $86\cdot\frac{1.2.3.4.5}{90\ldots\ldots86}=\frac{1}{511038}$,

Pour le 5e. cas, $\frac{1.2.3.4.5}{90\ldots\ldots86}=\frac{1}{43949268}$,

ce qu'il falloit 1°. trouver.

En ſecond lieu : ſi je parie 1 pour un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$; pour que le pari ſoit équitable, il faut que la miſe de celui qui parie contre moi que cet événement n'aura pas lieu ſoit

$\frac{m-n}{n}$ (XVIII.); donc représentant par 1 la mise que je fais à la lotterie dans chacun des 5 cas ci-dessus dits, & par $\frac{n}{m}$ la probabilité que mes numéros arriveront: $\frac{m-n}{n}+1$ ou $\frac{m}{n}$ représentera ce que la Lotterie devroit équitablement me payer lorsque tous mes numéros arrivent. Je dis $\frac{m-n}{n}+1$ & non pas seulement $\frac{m-n}{n}$; parce que j'ai commencé par confier ma mise 1 en m'intéressant à la Lotterie; ainsi elle devroit avant tout compte m'être remise quand je gagne le pari : donc en supposant que tous mes numéros arrivent, la Lotterie devroit équitablement me remettre

Au 1er. cas, 18<br>
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}$<br>
Au 3e. cas, 11748<br>
Au 4e. cas, 511038<br>
Au 5e. cas, 43949268

} fois ma mise 1,

ce qu'il falloit 2o. trouver.

En 3e. lieu : pour connoître l'avantage de la Lotterie en chacun des cinq cas ci-dessus dits, il faut, de ce qu'elle devroit me payer équitablement au cas où mes numéros arrivent, retrancher ce qu'elle me paye effectivement : & j'aurai

Au 1er. cas, $18-15 = 3$,<br>
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}-270=130+\frac{1}{2}$,<br>
Au 3e. cas, $11748-5200 = 6548$,<br>
Au 4e. cas, $511038-70000 = 441038$,<br>
Au 5e. cas, $43949268-1000000 = 42949268$ :

d'où l'on voit que la Lotterie est avantagée dans chacun de ces cas d'une partie déterminée de ce qui

devroit équitablement m'advenir en cas de gain; ſav. au 1er. cas, de $\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{6}$ ; au 2e. cas, de $\frac{130+\frac{1}{2}}{400+\frac{1}{2}}$ ou $\frac{29}{89}$; au 3e. cas, de $\frac{6548}{11748}$ ou $\frac{1637}{2937}$; au 4e. cas, de $\frac{441038}{511038}$ ou $\frac{220519}{255519}$; au 5e. cas, de $\frac{42949268}{43949268}$ ou $\frac{10737317}{10987317}$. ce qui reſtoit à trouver pour les 5 premiers cas.

A l'égard du 6e. & du 7e. cas, pour avoir la probabilité que $\left(\begin{matrix}\text{le numéro}\\ \text{les 2 numéros}\end{matrix}\right)$ que j'ai pris $\left(\begin{matrix}\text{arrivera}\\ \text{arriveront chacun}\end{matrix}\right)$ à la place du tirage qui lui a été aſſignée: dans la formule générale du §. XCV. je fais $m=90$, $p=5$, $n=r=\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$; & elle ſe réduit à $\left\{\begin{matrix}\frac{89.....86}{90.....86}=\frac{1}{90}\\ \frac{88.....86}{90.....86}=\frac{1}{8010}\end{matrix}\right.$ qui eſt la probabilité cherchée: donc ce que la Lotterie devroit équitablement me payer en cas de gain, eſt $\left\{\begin{matrix}90\\8010\end{matrix}\right.$ fois ma miſe 1; ainſi l'avantage de la Lotterie dans ce cas eſt $\left\{\begin{matrix}\frac{90-70}{90}=\frac{2}{9}.\\ \frac{8010-4900}{8010}=\frac{311}{801}.\end{matrix}\right.$ ce qui reſtoit à trouver.

Je crois inutile d'avertir ici le Lecteur que l'équité dont il vient d'être parlé eſt purement numérique, & ne préjudicie aucunement à l'équité légitime qui peut ſe trouver dans les avantages de la Lotterie relativement à la liberté que les actionnaires ont de s'y intéreſſer, aux frais indiſpenſables de ſon adminiſtration, ainſi qu'aux objets utiles & louables auxquels ces avantages ſont affectés.

## CXXXIX.

QUESTION 7^e^. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* dans lequel eſt inſcrit un cercle *HGFI* (Fig. 1^e^.) je fais rouler une boule au hazard; on demande quelle eſt la probabilité que la boule ceſſant de ſe mouvoir s'arrêtera dans le cercle.

*SOLUT.* Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité cherchée: 1°. la ſomme des points du quarré *ABCD*, ou ce qui eſt de même, la ſurface de ce quarré exprime le nombre total des chances : donc $m = AB^2$, & nommant $r$ le rayon $CF$ du cercle inſcrit, on a $m = 4r^2$.

2°. La ſomme des points de la ſurface du cercle inſcrit, ou ce qui eſt de même, la ſurface du cercle inſcrit exprime le nombre des chances qui donnent le hazard dont on cherche la probabilité : donc $n =$ circonfér. $HGFI \times \frac{CF}{2}$; & nommant $\mathcal{C}$ le rapport de la circonférence au diametre; circonf. $\frac{HGFI}{2CF} = \mathcal{C}$; donc circonférence $HGFI = \mathcal{C} \cdot 2CF$; donc $n = \mathcal{C} \cdot CF^2 = \mathcal{C} \cdot r^2$; donc la probabilité cherchée $\frac{n}{m} = \frac{\mathcal{C}r^2}{4r^2} = \frac{\mathcal{C}}{4}$; *C.Q.F.T.*

## CXL.

QUESTION 8^e^. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* (Fig. 2.) dans lequel eſt inſcrit un octogone régulier *abcdefgh*, on fait rouler une boule au hazard juſqu'à ce qu'elle s'arrête, & l'on recommence la même choſe quatre fois de ſuite : on demande quelle eſt la probabilité que la boule s'arrêtera au moins une fois hors de l'octogone.

*SOLUT.* Nommant $t$ le côté du quarré, $u$ le côté de l'octogone : j'ai $ah = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{Ah}^2}$ ; donc $ab$, $u = Aa\sqrt{2}$ : Mais $AB = Aa + ab + bB = 2Aa + ab$ ; donc $t = 2Aa + u$ ; donc $Aa = \frac{t-u}{2}$ ; donc $u = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$ ; ou bien $u = \frac{t}{\sqrt{2}+1}$.

Or la surface du quarré $ABED$ est $t^2$ ; & la surface de l'octogone est le périmetre $abcdefgh \times \frac{CF}{2} = 8u \cdot \frac{t}{4} = 2tu = \frac{2t^2}{\sqrt{2}+1}$ : donc la surface du quarré moins celle de l'octogone, est $t^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right\} = t^2 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, ce qui seroit dans le cas d'une seule épreuve le numérateur de la probabilité cherchée dont $t^2$ seroit le dénominateur ; donc dans le cas d'une seule épreuve, la probabilité cherchée seroit $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ; mais dans l'hypotheſe il y a quatre épreuves ; donc la probabilité cherchée eſt (CIII.)

$$1 - \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right\}^4 = \frac{1 + 12\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}.$$

## CXLI.

QUESTION 9e. Sur un plan circulaire horizontal $AFBKDG$ (Fig. 3e.) dont le diametre eſt $AK$ ($2r$) & dans lequel ſont inſcrits un triangle équilatéral $ABD$, & un quarré $HFGI$, dont les baſes $BD$ & $HI$ ſont paralleles entr'elles & perpendiculaires au diametre $AK$ ; on fait rouler une boule juſqu'à ce que ſon mouvement ſoit anéanti, & on recommence 8 fois de ſuite la même choſe : on demande quelle eſt la probabilité que dans ces 8 épreuves la boule s'arrêtera au moins une fois dans le triangle, & au moins une fois dans le quarré.

*Solut.* Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le triangle, & $\frac{p}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le quarré, dans le cas d'une seule épreuve ; $\varphi$ étant le nombre des chances qui donnent les 2 hazards à la fois : $\frac{m^8 - \overline{m-n}^8 - \overline{m-p}^8 + \overline{m-n-p+\varphi}^8}{m^8}$ sera la probabilité cherchée ( CXXV. ).

*Mais* $m$ est la surface du cercle $AFBKDG$ ; $n$ est la surface du triangle $ABD$ ; $p$ est la surface du quarré $HFGI$ ; & $\varphi$ qui est celle de l'exagone irrégulier $OQRTSP = n - BR \cdot QR - ON \cdot AN$ ; cela posé :

1°. $m = \zeta r^2$ ( $\zeta$ exprimant le rapport de la circonférence au diametre. ).

2°. $n = BM \cdot AM = \sqrt{\overline{BK}^2 - \overline{MK}^2} \cdot AM = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot r^2$.

3°. $KL \cdot LA = \overline{HL}^2$ ; donc $KL \cdot \overline{LN + NA} = \overline{HL}^2$, ou bien $KL \cdot \overline{HI + KL} = \frac{\overline{HI}^2}{4}$ ; d'où l'on tire $KL = \frac{HI}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{p}}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

Mais $KL = AK - LA = 2r - NL - AN = 2r - \sqrt{p} - KL$ ; donc $2KL$ ou $\sqrt{p}(\sqrt{2} - 1) = 2r - \sqrt{p}$ ; donc $p = 2r^2$.

4°. $BR = MB - HL = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \cdot r$ ; de plus $BR, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} r :: QR : MB, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r :: AM, \frac{3r}{2}$ ; donc $QR = \frac{3 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot r$ ; donc $BR \cdot QR = \frac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{4} \cdot r^2$. D'ailleurs $AN$ ou $KL$ ou $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} r$ ;

$ON :: AM, \frac{3r}{2} : BM. \frac{\sqrt{3}}{2}r$; donc $ON = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}r =$

donc $ON.AN = \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r^2$; donc $\phi = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r =$

$-\frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4}r^2 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)r^2 =$

donc la probabilité cherchée eſt

$$\frac{6^8 - (6-\frac{3\sqrt{3}}{4})^8 - (6-2)^8 + (6-2-7\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^8}{6^8} =$$

*C. Q. F. T.*

## CXLII.

QUESTION 10e. Sur un plan horizontal carrelé de carreaux réguliers égaux je jette en l'air un écu; on demande quelles ſont les probabilités que l'écu après ſa chûte ſe trouvera poſé ſur un ſeul ou ſur pluſieurs de ces carreaux.

*SOLUT.* Les carreaux étant par l'hypotheſe des polygones réguliers égaux, ſont néceſſairement ou des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des éxagones réguliers égaux: 1°. pour trouver la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur un ſeul carreau: j'inſcris dans un des carreaux

triangle $ABC$ — 4
quarré $ABCD$ — (Figure 5)
éxagone $ABCDEF$ — 6

une figure ſemblable $abc$ / $abcd$ / $abcdef$ éloignée des côtés du carreau de la longueur $Gg$ du rayon de l'écu: il eſt clair que ſi le centre de l'écu ſe trouve ſur la ſurface du polygone intérieur, l'écu ſe trouvera tout entier ſur le carreau; & que ſi le centre de l'écu ſe trouve hors de ce polygone intérieur,

qu'il se trouvera au moins un point noir en ce-

tre: ainsi la ſurface $\left\{\begin{array}{l} \text{ABC} \\ \text{ABC} - \text{D} \\ \text{ABC} - \text{D} - \text{E} - \text{F} \end{array}\right.$ eſt le nom-

bre total des chances; & la ſurface $\left\{\begin{array}{l} \text{ABC} \\ \text{ABC} - \text{D} \\ \text{ABC} - \text{D} - \text{E} - \text{F} \end{array}\right.$

eſt le nombre des chances qui donnent le point dont on cherche la probabilité: ainſi la probabilité P que l'écu après le choc ſe trouvera un entier

ſur le $\left\{\begin{array}{l} \text{triangle} \\ \text{quarré} \\ \text{exagone} \end{array}\right.$, eſt $\left\{\begin{array}{l} \text{ſurf.} \\ \text{ſurf.} \\ \text{ſurf.} \\ \text{ſurf.} \\ \text{ſurf.} \\ \text{ſurf.} \end{array}\right.$

Nommant $k$ le côté du carreau, $r$ le rayon de l'écu; & $O$ étant le centre du polygone, on a

ſurf. $ABC = \frac{k \cdot BG}{2}$; $BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$,

donc ſurf. $ABC = \frac{k^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$: de même ſurf. $abc = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; mais $AB, ab :: OG, \frac{bG}{2}, \frac{k\sqrt{3}}{4}$; $Og, OG - Gg, \frac{k\sqrt{3}}{6} - r$; donc $ab = k - 2r\sqrt{3}$,

donc pour le triangle $P = \frac{k^2 - 4k\sqrt{3}r + 12r^2}{k^2}$.

Dans le quarré $AB, ab :: OG, \frac{k}{2} :: ab : Og$,

$OG - Gg, \frac{k}{2} - r$; donc $ab = \frac{k^2 - 2kr}{k} = k - 2r$,

donc $P = \frac{\overline{ab}^2}{k^2} = \frac{k^2 - 4kr + 4r^2}{k^2}$.

Dans l'éxagone : $\overline{AO}^2 - \overline{AG}^2 = k^2 - \frac{k^2}{4} = \frac{3k^2}{4}$; donc $OG = \frac{k\sqrt{3}}{2}$; de plus $AB, k : ab :: OG, \frac{k.\sqrt{3}}{2} : Og, OG - Gg, \frac{k.\sqrt{3}}{2} - r$; donc $ab = \frac{k\sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}$; donc $P = \frac{\text{surf. } abcdef}{\text{surf. } ABCDEF} = \frac{ab.Og}{AB.OG} = \frac{3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2}{3k^2}$.

Si on fait $\frac{1}{2} = \begin{cases} (k^2 = 4kr\sqrt{3} + 12r^2) : k^2 \\ (k^2 - 4kr + 4r^2) : \quad k^2 \\ (3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2) : 3k^2 \end{cases}$; on en déduit $\frac{k}{r} = \begin{cases} 2\sqrt{3}.(2+\sqrt{2}) \\ 2.(2+\sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}.(2+\sqrt{2}) \end{cases}$; ce qui exprime pour le triangle, le quarré & l'exagone, le rapport qui doit ſe trouver entre le côté du polygone & le rayon de l'écu, pour pouvoir parier équitablement à miſes égales, que l'écu après ſa chûte ſe trouvera tout entier ſur un ſeul carreau.

Pour avoir la probabilité que l'écu ſe trouvera ſur 2 ou un plus grand nombre de carreaux, j'observe que ce hazard aura lieu, quelque part que le centre de l'écu ſoit placé entre les périmetres $\begin{cases} ABC \text{ \& } abc \\ ABCD \text{ \& } abcd \\ ABCDEF \text{ \& } abcdef \end{cases}$; donc le nombre des chances qui donnent ce hazard eſt exprimé par les ſurfaces qu'entourent ces périmetres, c'eſt-à-dire

$$r \begin{cases} 3kr - 3\sqrt{3}\cdot r^2, & \text{dans le triangle} \\ 4kr - 4r^2 & \text{dans le quarré} \\ 6kr - 2\sqrt{3}\cdot r^2 & \text{dans l'éxagone} \end{cases}; \text{ d'où}$$

$$\text{n tire } P = \begin{cases} (4kr\cdot\sqrt{3} - 12r^2) : k^2 \\ (4kr - 4r^2) : k^2 \\ (4kr\cdot\sqrt{3} - 4r^2) : 3k^2 \end{cases};$$

égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$, on en déduit

$$\text{mme ci-deſſus, } \frac{k}{r} = \begin{cases} 2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{2}) \\ 2\cdot(2+\sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(2+\sqrt{2}) \end{cases}.$$

3°. Pour avoir la probabilité que l'écu, aprés chûte, ſe trouvera ſur 3 carreaux au moins : de pointe de chaque angle des figures intérieures, prolonge les côtés de ces figures juſqu'à leur contre avec le périmetre du carreau : la ſomme s parallélogrammes *A M a m* qui en naîtront ra celle des points où le centre de l'écu doit être cé pour que l'écu ſoit ſur plus de 2 carreaux ; nſi la ſomme de ces parallélogrammes, c'eſt-à-re $2\sqrt{3}\cdot r^2$ pour le triangle, $4r^2$ pour le quarré, $\sqrt{3}\cdot r^2$ pour l'éxagone, exprimera le nombre des hances qui donnent le hazard dont il s'agit : diviant cette quantité par la ſurface du carreau qui exrime le nombre total des chances, on aura la probabilité cherchée qui eſt $8r^2 : k^2$ pour le triangle, $r^2 : k^2$ pour le quarré, $8r^2 : 3k^2$ pour l'exagone ; t égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$ ; on tire $\frac{k}{r} = 4$, $\sqrt{2}$, & $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

4°. La probabilité que l'écu après ſa chûte trouvera ſur deux carreaux ſans plus, ſe connoît en obſervant que ce hazard a lieu quand le centre de l'écu ſe trouve entre les périmetres du carreau & de la figure intérieure, & hors des parallélogrammes $AM\,am$, & diviſant ces parties de ſurfaces par celle du carreau, & on aura pour cette probabilité $(4\sqrt{3}\cdot kr - 20r^2) : k^2$ dans le triangle, $(4kr - 8r^2) : k^2$ pour le quarré, & $(4kr - 4\sqrt{3}\cdot r^2) : \sqrt{3}\cdot k^2$ pour l'éxagone: & égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$; on a pour le pari équitable à miſes égales, $\frac{k}{r} = \frac{20}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ pour le triangle, 4 pour le quarré, & $\frac{2}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{-2})$ pour l'exagone: d'où l'on voit que ſi les carreaux ſont des exagones réguliers, le pari ne peut ſe faire équitablement à miſes égales, à cauſe de la quantité imaginaire $\sqrt{-2}$.

5°. Pour avoir la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur 6 carreaux triangulaires, ou ſur 4 quarrés, ou ſur 3 carreaux exagones, du ſommet d'un angle du carreau pour centre & du rayon $Gg$ de l'écu, j'imagine un cercle qui coupe les côtés du carreau en deux points $P$ & $Q$: les ſecteurs $3PCQ$, $4PDQ$, $6PFQ$, ou ce qui eſt de même, $\frac{Cr^2}{2}$, $Cr^2$, $2Cr^2$ ($C$ étant le rapport de la circonférence au diametre) exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit: ainſi la probabilité $P$ de ce hazard ſera $\frac{2Cr^2}{\sqrt{3}k^2}$, $\frac{C\cdot r^2}{k^2}$, & $\frac{4Cr^2}{3\sqrt{3}\cdot k^2}$; & ſi on fait $P = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{k}{r} = \frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2C}$ & $\frac{2\sqrt{2C}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$.

6°. Pour avoir la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur 3 carreaux & 2 joints ſans plus : des parallélogrames $3\,AMam$, $4\,AMam$, $6\,AMam$ ou $2\sqrt{3}\cdot r^2$, $4\cdot r^2$, $4\sqrt{3}\cdot r^2$, je retranche les ſecteurs $3\,PCQ$, $4PDQ$, $6PFQ$, ou $\frac{6}{2}\cdot r^2$, $6\cdot r^2$, $2\,6\cdot r^2$; les reſtes $(2\sqrt{3}-\frac{6}{2})\cdot r^2$, $(4-6)\cdot r^2$, $2\cdot(2\cdot\sqrt{3}-6)\cdot r^2$ exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone, le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit : d'où l'on déduit $P=\frac{8\cdot\sqrt{3}-2\,6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{r^2}{k^2}$, $(4-6)\cdot\frac{r^2}{k^2}$, $\frac{8\sqrt{3}-4\,6}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{r^2}{k^2}$; & égalant ces valeurs de $P$ à $\frac{1}{2}$, on en déduit $\frac{k}{r}=\frac{2\cdot\sqrt{(4\sqrt{3}-6)}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(4-6)}$, & $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}-6)}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

La méthode dont on s'eſt ſervi pour réſoudre cette 10e. queſtion peut s'employer pour trouver la probabilité de toutes les poſitions que l'écu pourroit avoir ſur des carreaux irréguliers égaux ou inégaux, tels que triangles rectangles, lozanges, parallellogrammes rectangles ou obliquangles, &c.

Cette queſtion & la ſuivante ſont extraites des œuvres de M. de Buffon, au traité qui a pour titre : *Eſſai d'Arithmétique morale.*

## CXLIII.

QUESTION IIe. Sur un plancher compoſé de planches égales & parallelles, on jette en l'air une baguette; on demande quelle eſt la probabilité que

cette baguette après ſa chûte croiſera un des joints paralleles du plancher.

*SOLUT.* Soit *ABCD* (Fig. 7.) l'une des planches : entre les joints paralleles *AB* & *CD*, je tire deux autres paralleles *ab* & *cd* éloignées des premieres chacune de la demi-longueur de la baguette.

1°. Il eſt clair que ſi le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace *abcd*, la baguette ne peut, dans quelque ſituation qu'elle ſe trouve, croiſer *AB* ni *CD*.

2°. Si le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace *AB ab*; elle peut, ſelon ſa ſituation, croiſer ou ne pas croiſer le joint *AB*. Je mene une perpendiculaire *HL* entre les deux lignes *AB* & *ab*; d'un point quelconque *P* de cette ligne *HL* pris pour centre, & de la moitié de la longueur de la baguette pour rayon, je décris un cercle qui coupe la ligne *AB* aux points *G* & *g*, & le prolongement de *HL* en *M*. Cela poſé : je dis que le milieu de la baguette ſe trouvant au point *P*, ou dans la partie infiniment petite *Pp*; le nombre des poſitions poſſibles de la baguette dans leſquelles elle croiſe *AB*, eſt repréſenté par *Pp*. arc *GMg*, comme il eſt évident : & dans chaque petite partie *Pp* de la ligne *LH* où le milieu de la baguette peut ſe trouver, le nombre des poſitions où la baguette croiſe *AB* eſt repréſenté par le produit de ce *Pp* par ſon arc correſpondant *GMg*: nommant donc *dx* & *y* les variables correſpondantes *Pp* & *GMg*; *ydx* ſera le nombre des poſitions où la baguette croiſera *AB*, tandis que ſon milieu ſera dans une partie infiniment petite de la ligne *LH*: donc le nombre des poſitions où la baguette croiſera *AB* ſon milieu étant dans la ligne *LH*, eſt $\int y\,dx$; & comme il y a autant de lignes *LH* dans l'eſpace

l'eſpace $AB\,ab$ qu'il y a de points dans la ligne $AB$; $AB.\int y\,dx$ ſera le nombre des poſitions où la baguette croiſe $AB$, ſon milieu étant dans l'eſpace $AB\,ab$.

3°. Si le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace $CD\,cd$, on trouvera de même que le nombre des poſitions où la baguette croiſe $CD$, eſt $CD.\int y\,dx$; ou $AB.\int y\,dx$: donc le nombre des chances qui donnent le hazard dont il s'agit, eſt $2\,AB.\int y\,dx$.

4°. Le nombre de toutes les poſitions poſſibles de la baguette ſur la planche $ABCD$ eſt évidemment $AB.AC.c$ ($c$ repréſentant la circonférence dont la baguette eſt le diametre :) donc la probabilité cherchée eſt $\frac{2\,AB.\int y\,dx}{AB.AC.c}=\frac{2\int y\,dx}{AC.c}$.

Pour avoir la ſurface repréſentée par $\int y\,dx$, je décris une cycloïde ordinaire $BDAdb$ (Fig. 8e.) dont le cercle générateur a pour diametre $AE$ longueur de la baguette : par le milieu $C$ de $AE$ je mene une parallele $DCd$ à la baſe $BEb$ de la courbe qu'elle coupera en $D$ & $d$; du même point $C$ pour centre je décris le cercle générateur qui touche la cycloïde à ſon ſommet $A$, & ſa baſe à ſon milieu $E$, & qui coupe la droite $Dd$ aux points $M$ & $m$.

Je dis que l'aire $MDAdm$ terminé par la cycloïde, le cercle & la ligne $Dd$, eſt $=\int y\,dx$: car prenant ſur la ligne $AC=LH$, un point quelconque $P$; de ce point menant une double ordonnée $RPR$ de la cycloïde parallélement à $Bb$, laquelle coupera le cercle en $Q$ & $Q$, & menant la double ordonnée infiniment proche $rpr$ qui coupe le cercle en $q$ & $q$; le petit aire $RQqr=QR.Pp$; mais par la nature de la cycloïde, chaque droite $QR$ eſt égal à l'arc de cercle correſpondant $QA$; donc le petit aire $RQqr=Pp.AQ$; donc

$\int QRrq = \int Pp \cdot AQ$, ou ce qui eſt de même, l'aire $2.QARQ = \int QAQ \cdot Pp = \int y\,dx$; donc l'aire $MDAmd$ = la fonction $\int y\,dx$ dans laquelle on fait $x = AC = LH$.

## CXLIV.

Nous terminerons ce chapitre par une queſtion, dont la ſolution mettra le lecteur à portée d'apprécier la commune opinion où l'on eſt, que la multitude des épreuves d'un pari déſavantageux peut le rendre avantageux à la longue; de maniere que celui qui a perdu une fois un pari de cette eſpece, tente au riſque de ſa fortune, en le réitérant un certain nombre de fois, de regagner à la fin non-ſeulement ce qu'il aura perdu dans toutes les épreuves antérieures, mais même de gagner en ſus ce qu'il vouloit gagner d'abord à la premiere épreuve.

## CXLV.

Queſtion 12e. J'engage une miſe 1 au pari d'un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, contre Pierre qui parie une miſe $F$ que cet événement n'aura pas lieu; avec les conditions, 1°. que ſi je perds le pari à une 1re. épreuve, nous le recommencerons à une 2e. épreuve; & que je parierai contre lui une miſe $\frac{F+1}{F}$ contre $1+F$ pour le même événement: 2°. que ſi je perds encore à la 2e. épreuve, je parierai contre lui à une 3e. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^2$ contre $1+\frac{F+1}{F}+F$ ou $\frac{\overline{F+1}^2}{F}$ pour le même événement: 3°. que ſi je perds encore à la 3e. épreuve, je parierai contre lui à une 4e. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^3$ contre $1+\frac{F+1}{F}+\frac{\overline{F+1}^2}{F}+F$

ou $\frac{\overline{F+1}^3}{F^2}$ pour le même événement : 4°. que ſi je perds encore à la 4e. épreuve, nous continuerons le pari ſuivant la même loi, & que Pierre tiendra la gageure, un nombre déterminé $N$ d'épreuves ; de maniere que ſi je gagne avant la $N^e$ ou à la $N^e$ épreuve, il me reſtera de gain la quantité $F$ ; & que ſi je perds à toutes les $N$ épreuves, je payerai à Pierre la ſomme de toutes mes miſes ; c'eſt-à-dire ;

$$1 + \frac{F+1}{F} + \left(\frac{F+1}{F}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{F+1}{F}\right)^{N-1},$$

ou $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}}$ : on demande ſi les conditions auxquelles j'ai la faculté de renouveller ainſi le pari pendant un nombre déterminé $N$ d'épreuves, rendent ce pari plus ou moins avantageux pour moi, qu'il n'auroit été s'il n'y eût eu qu'une ſeule épreuve.

*SOLUT.* 1°. La probabilité que l'événement pour lequel je parie arrivera dans le cours des $N$ épreuves, eſt $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CIII.).

2°. La probabilité qu'il n'arrivera pas, eſt $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CI.).

3°. La ſomme que je perdrai, s'il n'arrive pas, eſt $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}}$.

4°. La ſomme que je gagnerai s'il arrive, eſt $F$. Donc ce que je devrois gagner, ſi l'événement pour lequel je parie arrive, eſt le 4e. terme $x$ de la propoſition ſuivante $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N : \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N :: \frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}} : x = \frac{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N}{F^{N-1} - F^{N-1} \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N}$ : d'où

l'on voit que l'avantage que j'ai dans ce pari, (s'il y en a) eſt le rapport de l'excès de ce que j'ai ſur ce que je dois équitablement avoir en cas de gain, à ce que je dois équitablement avoir; c'eſt-à-dire, $\left\{ F - \frac{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{F^{N-1} - F^{N-1}(1 - \frac{n}{m})^N} \right\} :$

$$\frac{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{F^{N-1} - F^{N-1} \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - F^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N - \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N + F^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}.$$

Mais cet avantage eſt poſitif, nul ou négatif, ſelon que $F^N \gtreqless \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N$, ou que $F \gtreqless \overline{F+1} \cdot (1 - \frac{n}{m})$, ou que $Fm \gtreqless Fm + m - Fn - n$, ou que $Fn \gtreqless m - n$; ou enfin que $F \gtreqless \frac{m-n}{n}$.

Ainſi le rapport de $F$ à $\frac{m-n}{n}$ qui détermine l'avantage, l'équité ou le déſavantage du pari en une ſeule épreuve, le détermine encore dans un nombre quelconque $N$ d'épreuves: avec cette différence, que lorſque le pari eſt équitable en une ſeule épreuve, il reſte toujours équitable, quelque ſoit le nombre des épreuves; au lieu que lorſque le pari eſt avantageux ou déſavantageux pour un des parieurs, cet avantage ou déſavantage croît dans un nombre don-

né $N$ d'épreuves, ſuivant une fonction combineé des quantités $F, \frac{m}{n}$ & $N$.

D'où l'on voit que malgré l'augmentation de probabilité qu'un parieur acquiert par la multiplicité des épreuves; ſi le pari eſt déſavantageux pour lui à la premiere épreuve, il le devient beaucoup plus en la réitérant: parce que ſes miſes augmentent dans un plus grand rapport que les probabilités de l'événement qui peut le faire gagner.

# CHAPITRE VI.

## *De l'Évaluation des Probabilités par les Expériences ou Obſervations.*

### §. CXLVI.

LES faits ou les propoſitions dont il nous eſt poſſible d'évaluer les probabilités par une analyſe exacte, ſont en très-petit nombre & d'une médiocre importance relativement à ceux à l'égard deſquels on ne peut ni aſſigner un nombre total de chances également poſſibles, ni déterminer le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent les hazards dont s'agit : à ce défaut on peut avoir recours aux obſervations & expériences, au moyen deſquelles on trouvera à peu près la probabilité qu'il importe de connoître, non pas certainement, mais avec une eſpérance qui approchera fort de la certitude. En effet : il eſt d'expérience que dans une multitude d'épreuves d'un même acte, mouvement ou état de choſes, le nombre des retours de chacun des hazards qui en dépendent eſt à-peu-près en proportion de la probabilité de ce hazard : de maniere, par exemple, que dans une multitude de jets de 2 dés à jouer ordinaires il vient à-peu-près cinq dés ſimples pour un doublet, chaque point ſimple revient à-peu-près le même nombre de fois que chacun des autres, il en eſt de même de chaque doublet, & ainſi des autres hazards; en ſorte qu'en prenant pour dénominateur le nombre total des épreuves, & pour numérateur le nombre de fois

qu'un hazard ſera arrivé dans le cours de ces épreuves; il eſt preſque certain que la fraction approchera de la véritable probabilité de ce hazard.

Telle eſt la méthode que nous allons développer dans ce Chapitre, laquelle n'eſt pas ſeulement fondée ſur l'expérience, ni ſur une vague métaphyſique, mais qui eſt ſuſceptible d'une démonſtration rigoureuſe, ainſi qu'on le verra par les proportions ſuivantes.

## CXLVII.

*THÉORÊME.* Si l'acte ou mouvement duquel dépend un hazard ſpécifié eſt réitéré un certain nombre $N$ de fois, & ſi on nomme $\frac{n}{m}$ la probabilité de ce hazard; je dis que le nombre de fois que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des épreuves ſuppoſées, eſt le nombre entier intermédiaire entre les 2 fractions $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1}\,\frac{n}{m} - 1$; & que ſi ces 2 fractions ſont réductibles en nombres entiers, chacun de ces nombres eſt le nombre de fois que le hazard ſpécifié doit le plus probablement arriver.

*DÉMONST.* Nous avons vu (CXIII.) que $\frac{n}{m}$ étant la probabilité d'un événement, la probabilité que cet événement arrivera le nombre de fois $x$ juſte en un nombre $N$ d'épreuves, eſt $\frac{N\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$; donc le nombre de fois juſte que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des $N$ épreuves ſuppoſées, eſt la valeur de $x$ dans le cas où la fonction variable $\frac{N\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ eſt à ſon état de

*maximum* ; c'eſt-à-dire, la plus grande poſſible : or, ſi dans cette fonction variable on ſubſtitue ſucceſſivement à $x$ tous les nombres entiers depuis o juſqu'à $N$ incluſivement ; cette fonction augmentera continuellement à chaque ſubſtitution juſqu'à un certain terme, paſſé lequel elle diminuera ; & il eſt évident que le terme où cette quantité paſſera de l'augmentation à la diminution, eſt en même temps celui où ſes valeurs immédiatement conſécutives ſont égales, & où ſa valeur eſt la plus grande poſſible : cela poſé,

Si dans $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{\frac{m-n}{}}^{N-x}$, je ſubſtitue à $x$, les quantités $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$ ; elle devient

$$P, \frac{N....(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1)}{1.2.3....\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}}}{m^N} \cdot \overline{\frac{\frac{n}{m}}{m-n}}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}}$$

$$P^1, \frac{N...(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+2)}{1.2.3....(\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1)} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1}}{m^N} \cdot \overline{\frac{\frac{n}{m}-1}{m-n}}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1} ;$$

d'où l'on voit que $P = P^1 \cdot \frac{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m=n}$,

mais $\frac{N-\overline{N+1}\frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m-n} = 1$, car

$$(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1) \cdot n = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} \cdot \overline{m-n},$$

comme il eſt aiſé de s'en convaincre : donc $P^1 = P$ ; donc la plus grande valeur de la fonction variable $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{\frac{m-n}{}}^{N-x}$ eſt, lorſque

$x = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ ou $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$, ou le nombre entier intermédiaire entre ces deux valeurs, ſi ce ſont des fractions. *C. Q. F. D.*

## CXLVIII.

*Coroll.* Si $N\frac{n}{m}$ eſt un nombre entier $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m}$ & $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m} - 1$, ou bien $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$ ſont des fractions, & $N\frac{n}{m}$ eſt le ſeul nombre entier qu'il puiſſe y avoir entre ces 2 fractions; par conſéquent le nombre de fois que le hazard ſpécifié doit le plus probablement arriver.

## ÇXLIX.

*Remarque.* Si dans la quantité $\frac{N.... \overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$, on ſubſtitue ſucceſſivement à $x$ tous les nombres entiers depuis o juſqu'à $N$, & ſi $N\frac{n}{m}$ eſt un nombre entier : non ſeulement la valeur acquiſe à cette quantité par la ſubſtitution de $N\frac{n}{m}$ à $x$ eſt la plus grande poſſible; mais les valeurs acquiſes à la même quantité par la ſubſtitution de $N\frac{n}{m} \pm 1$ à $x$, ſont après celles-là les plus grandes poſſibles; les valeurs acquiſes à la même quantité par la ſubſtitution de $N \cdot \frac{n}{m} \pm 2$ à $x$ ſont après ces dernieres les plus grandes poſſibles, ainſi de ſuite; de maniere que la probabilité d'avoir dans $N$ épreuves le hazard ſpécifié, un nombre de fois approchant de $N\frac{n}{m}$ équivaut preſque à la certitude.

## C L.

Pour rendre cette remarque ſenſible par des exemples : je ſuppoſe 1°. que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, & $N = 10$ ; la fonction $\frac{N \ldots\ldots \overline{N-x+1}}{1.2\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ devient $\frac{10\ldots\ldots\overline{11-x}}{1.2\ldots\ldots x} \cdot \frac{3^x}{5^{10}} \cdot 2^{10-x}$ ; ſubſtituant ſucceſſivement à $x$ dans cette derniere expreſſion, les nombres

$$\left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{matrix}\right. ; \text{ elle devient } \left\{\begin{matrix}&&&2&0&4+\frac{4}{5}\\&&&3&0&7&2\\&&2&0&7&3&6\\&&8&2&9&4&4\\&2&1&7&7&2&8\\3&9&1&9&1&0+\frac{2}{5}\\4&8&9&8&8&8\\&4&1&9&9&0&4\\&2&3&6&1&9&6\\&&7&8&7&3&2\\&&1&1&8&0&9+\frac{4}{5}\end{matrix}\right. : 1953125 ;$$

or la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié $N\frac{n}{m}$ ou $N\frac{n}{m}+1$ ou $N\frac{n}{m}+2$ fois, eſt

$$\left\{\begin{matrix}2&1&7&7&2&8+\\3&9&1&9&1&0+\frac{2}{5}+\\4&8&9&8&8&8+\\4&1&9&9&0&4+\\2&3&6&1&9&6+\end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1755626+\frac{2}{5}}{1953125}$$

probabilité peu différente de la certitude.

2°. Je ſuppoſe que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$ & que $N = 9$, l'expreſſion générale $\frac{N\ldots\ldots\overline{N-x+1}}{1.2\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ devient $\frac{9\ldots\ldots\overline{10-x}}{1.2\ldots\ldots x} \cdot \frac{3^x}{5^9} \cdot 2^{9-x}$ : ſubſtituant ſucceſ-

ement à $x$, dans cette derniere expreſſion, les nbres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ; elle devient { 512 ; 6912 ; 4172 ; 14515 2 ; 32659 2 ; 48988 8 ; 48988 8 ; 31492 8 ; 11809 8 ; 1968 3 } : 1953125 ;

la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié un nom- e de fois qui ne differe de $N\frac{n}{m}$ que d'une quan- é moindre que 2, eſt

{ 32659 2 + ; 48988 8 + ; 48988 8 + ; 31492 8 } : 1953125 = $\frac{1621296}{1953125}$,

i differe peu de l'unité ou de la certitude.

3°. Si $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$ & $N = 10$ ; l'expreſſion générale evient $\frac{10.....\overline{11-x}}{1.2.....x} \cdot \frac{2^x}{3^{10}}$ ; dans laquelle ſubſtituant à $x$

0 1 2 3 4 5 ; elle devient { 1 ; 20 ; 180 ; 960 ; 3360 ; 8064 ; 13440 ; 15360 ; 11520 ; 5120 ; 1024 } : 59049 ;

r la probabilité d'avoir en 10 épreuves le hazard écifié, le nombre $N\frac{n}{m}$ de fois à 1 près, eſt

$\left\{\begin{matrix}13440+\\15360+\\11520+\end{matrix}\right\} : 59049 = \frac{40326}{59049}$

differe peu de l'unité : & la probabilité d'a
hazard le nombre de fois $N\frac{n}{m}$ à 2 près, e

$\left\{\begin{matrix}8064+\\40320+\\5120\end{matrix}\right\} : 59049 = \frac{53504}{59049}$

differe encore moins de l'unité.

4°. Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{1000}$, & $N=2$ ; la prob
d'amener dans les deux épreuves le hazard ſp

$\left\{\begin{matrix}0\\1\text{ fois ; eſt }\\2\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}998001\\1998\\1\end{matrix}\right\} : 1000000$

l'on voit que la probabilité que le hazard n'a
pas du tout dans les deux épreuves, eſt $\frac{998001}{1000000}$
approche fort de la certitude ; parce que
cas 0 eſt le nombre entier intermédiaire en
fractions $\overline{N+1}\frac{n}{m}$, $\frac{3}{1000}$ & $\overline{N+1}.\frac{n}{m}-1$, -

## CLI.

*COROLL. I.* Si l'acte, mouvement ou é
choſes duquel dépend un hazard ſpécifié,
téré un certain nombre $N$ de fois ; il eſt p
certain que ce hazard arrivera un nombre de f
tel que la fraction $\frac{M}{N}$ approchera fort de l
babilité exacte $\frac{n}{m}$ de ce même hazard : car
$\frac{M}{N} = \frac{n}{m}$ ; on en déduit $M = N \cdot \frac{n}{m}$.

## CLII.

*COROLL. II.* Si l'on ignore & qu'on ne

ver aucun moyen d'évaluer exactement la pro-
ilité d'un hazard ſpécifié, on peut en conſé-
nce des principes ci-deſſus établis, avoir, d'après
expériences ou obſervations, preſque certaine-
t cette probabilité approchée. Pour y parvenir,
éitérera ou l'on obſervera le plus grand nombre
ois qu'il ſera poſſible ou commode, l'acte,
vement ou état de choſes duquel ce hazard
end : & nommant $N$ le nombre de ces expé-
ces ou obſervations, $M$ le nombre de fois que
hazard ſera arrivé; on prendra la fraction $\frac{M}{N}$
r la probabilité cherchée.

*Par exemple.* Si Pierre ayant joué 300 parties
checs contre Paul, en a gagné 136; je pourrai
ndre $\frac{136}{300}$ ou $\frac{34}{75}$ pour la probabilité que Pierre ga-
ra la premiere partie d'échecs qu'il jouera contre
l; & je ſerai preſque aſſuré que cette probabi-
ne ſera pas conſidérablement éloignée de la
table.

## CLIII.

L'USAGE de cette méthode exige deux précau-
ns eſſentielles dont l'une regarde le nombre,
tre la qualité des expériences ou obſervations
quelles on veut déduire la probabilité qu'il im-
te de connoître.

## CLIV.

1°. SI LE nombre de ces expériences eſt très-
it, & qu'aucune n'ait donné le hazard dont on
rche la probabilité; non-ſeulement on ne peut
conclure rigoureuſement que ce hazard eſt im-
ſible; mais on n'eſt pas même aſſuré qu'il n'ait
certain degré de probabilité. Si au contraire,
hazard eſt arrivé à toutes les épreuves; loin d'en

guliere ou irréguliere : ſi cette ſuite eſt irréguliere pour la rendre réguliere, on y fera les changements néceſſaires, mais les plus légers poſſibles; cette ſuite étant rendue réguliere par cette voie on l'augmentera d'un terme ; on prendra ce terme pour numérateur, & le dénominateur commun pour dénominateur ; & la fraction ainſi formée pourra être priſe avec quelque eſpérance d'une approximation raiſonnable pour la probabilité cherchée.

*Par exemple :* Pierre ayant joué contre Paul 408 parties de trictrac pendant leſquelles ils ſe ſont inégalement perfectionnés dans la ſcience du jeu; il eſt arrivé que dans les 68 premieres parties Pierre n'en a gagné que 12 ; dans les 68 ſuivantes 15, dans les 68 ſuivantes 19 ; dans les 68 ſuivantes 26 ; dans les 68 ſuivantes, 24, & enfin dans les 68 dernieres 31 ; la probabilité que Pierre avoit de gagner étoit, dans la 1re. époque $\frac{12}{68}$ ; dans la 2e. $\frac{15}{68}$ ; dans la 3e. $\frac{19}{68}$ ; dans la 4e. $\frac{26}{68}$ ; dans la 5e. $\frac{24}{68}$ ; & enfin dans la 6e. $\frac{31}{68}$.

Dans la ſuite 12, 15, 19, 26, 24, 31, des numérateurs je ſubſtitue les termes 24 & 28, aux termes 26 & 24, & elle devient 12, 15, 19, 24, 28, 31 qui eſt une ſuite réguliere, les différences des termes formant entre elles la ſuite 3, 4, 5, 4, 3 : je prendrai pour les 7e. 8e. 9e. 10e. termes &c. les nombres 33, 34, 34, 33, &c. j'aurai une ſuite réguliere où les différences des termes formeront la ſuite 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, &c. & je prendrai $\frac{33}{68}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{34}{68}$ pour les probabilités que Pierre gagnera dans les 7e. 8e. & 9e. époques.

## CLVIII.

LA VOIE des expériences & obſervations peut être employée pour trouver les probabilités des hazards de toute eſpece, même de ceux dont la probabilité pourroit s'évaluer exactement par l'analyſe : il arrivera ſans doute très-ſouvent, que la probabilité ainſi trouvée différera beaucoup de la probabilité exacte donnée par l'analyſe : mais il faut conſidérer que dans les calculs, les inſtruments du hazard ſont ſuppoſés parfaits, c'eſt-à-dire, également capables de produire toutes les chances dont on fait l'énumération; ce qui ne peut avoir lieu dans la pratique, où l'imperfection des inſtruments influe d'ordinaire beaucoup ſur l'événement. Or par la méthode actuelle, les imperfections des inſtruments du hazard ayant influé de fait ſur les réſultats obſervés; les obſervations deſquelles on déduit les probabilités évaluent raiſonnablement ces imperfections dans le calcul : de ſorte qu'il n'eſt pas impoſſible & qu'on peut quelquefois préſumer avec fondement, que la probabilité évaluée par la voie des expériences approche davantage de la probabilité cherchée que celle qu'on auroit évaluée par une analyſe exacte.

Pour rendre ceci ſenſible par un exemple, je ſuppoſe que deux dés à jouer ordinaires ſont parfaitement cubiques, & de matiere également denſe dans toute l'étendue de leur ſolidité; ſi ces deux dés ſont jettés au hazard ſur une table horiſontale, il eſt certain dans la théorie qu'il y a 36 réſultats également poſſibles. Mais s'il ſe trouve dans ces dés quelque irrégularité phyſique; par exemple, ſi l'un de ces dés eſt de matiere plus denſe & par conſéquent plus peſante vers une face que vers les 5 autres; ce dé (toutes choſes d'ailleurs égales) doit

tomber plus ſouvent ſur cette face que ſur les autres ; & par conſéquent doit amener plus ſouvent le point oppoſé à cette face, qu'aucun des cinq autres points ; la méthode analytique devient donc fautive alors, & l'on peut lui préférer la méthode des expériences.

Pour y parvenir, je jetterai ces deux dés ſur la table un nombre de fois ſuffiſant, par exemple 144 fois ; & ſi dans le cours de ces 144 épreuves le point ſonnet arrive 12 fois, & le point 5 & 4 ſeulement 6 fois ; je prendrai $\frac{12}{144}$ ou $\frac{1}{12}$ pour la probabilité d'amener ſonnet avec ces dés, & $\frac{6}{144}$ ou $\frac{1}{24}$ pour la probabilité d'amener 5 & 4 ; & j'approcherai peut être davantage de la véritable valeur de ces probabilités que ſi je les évaluois à $\frac{1}{36}$ & $\frac{1}{18}$ ; parce qu'il eſt très-préſumable que dans un grand nombre d'épreuves, la fréquence des retours de chaque hazard poſſible, eſt à-peu-près proportionelle avec la probabilité réelle de ce hazard.

C'eſt d'après cette maniere d'évaluer les probabilités qu'il arrive ſi fréquemment aux joueurs malheureux de changer de dés, de cartes, de coupes, de places, & d'employer avec ſuccès divers autres moyens de changer les inſtruments du hazard, lorſque l'expérience leur a fait connoître le déſavantage qui réſulte pour eux de l'imperfection de ces inſtruments.

## CLIX.

ON PEUT trouver, par la voie des expériences, la probabilité approchée des divers événements qui peuvent avoir lieu, non-ſeulement dans les jeux appellés proprement jeux de hazard, mais auſſi dans les jeux mixtes où le hazard & le bien

joué combinés peuvent concourir plus ou moins à déterminer l'événement ; tels que le trictrac, le billard, la paume, la plupart des jeux de cartes appellés jeux de ſociété ; & enfin dans les jeux où le bien joué ſeul décide, tels que les échecs & autres.

## CLX.

ON PEUT auſſi par cette méthode, au moyen d'un nombre ſuffiſant d'expériences ou d'obſervations bien choiſies, trouver la probabilité des divers événements phyſiques dont les cauſes occaſionelles ſont inconnues & qui ne ſont pas aſſujettis à des retours périodiques connus qui en rendent l'événement certain.

## CLXI.

*EXEMPLES.* Pour trouver la probabilité qu'un homme actuellement âgé d'un nombre $n$ d'années, vivra juſques à un nombre d'années exprimé par $n + p$ ; ſur les regiſtres mortuaires de la Ville, & s'il eſt poſſible, de la province qu'habite cet homme, je prends le nombre des perſonnes mortes après l'âge de $n$ années, je fais de ce nombre le dénominateur de la probabilité cherchée ; je prends enſuite le nombre d'entre ces perſonnes qui ſont mortes après l'âge de $n + p$ années, & je fais de ce nombre le numérateur de cette même probabilité.

Par ce moyen : dans un pays où les regiſtres mortuaires datent d'un peu loin & ſont rédigés avec exactitude, on peut toujours trouver la probabilité, qu'une perſonne dont l'âge eſt connu vivra 1, 2, 3, ou un plus grand nombre d'années de plus ; & à quel âge on peut parier équitablement à miſes égales, que cette perſonne parviendra. D'après une ſuite d'obſervations ſemblables, on pourra dreſ-

ſer pour chaque lieu des tables des probabilités de la vie humaine pour tous les âges, telles que celles qui ſe trouvent dans les œuvres de M. de Buffon.

De même, il eſt hors de doute que par une ſuite aſſez longue d'obſervations météorologiques, on ne puiſſe trouver pour chaque pays & chaque ſaiſon les probabilités des diverſes températures de l'air auxquelles on peut s'attendre, & peut-être reconnoître enfin, après un grand nombre d'années, dans ces viciſſitudes, des loix uniformes & des retours périodiques au moyen deſquels on pourroit fixer l'ordre de ces révolutions & les prévoir avec certitude.

## CLXII.

ON PEUT encore, par cette méthode des obſervations & expériences, déterminer à-peu-près la probabilité des effets moraux réſultants de la combinaiſon des volontés, & par conſéquent des jugements & des intérêts humains dans des circonſtances données, ſoit qu'il s'agiſſe de conjecturer le réſultat des qualités connues d'un homme en particulier, ou des qualités connues de pluſieurs hommes réunis ou diviſés ſur un même objet.

## CLXIII.

SI je voulois, par exemple, évaluer la probabilité du témoignage rendu par un homme dans une circonſtance donnée; je comparerois enſemble tous les témoignages vérifiés rendus par ce même homme, ou par d'autres ayant les mêmes intérêts & les mêmes lumieres à-peu-près, & dans des circonſtances à-peu-près ſemblables; je prendrois le nombre des témoignages comparés pour le dénominateur, & le nombre de ces témoignages reconnus véritables pour le numérateur de la probabilité cherchée.

## CLXIV.

Et comme en ſuivant cette méthode, ni la probabilité, ni la certitude ne peuvent s'évaluer avec une exactitude géométrique, mais ſeulement avec la forte eſpérance d'une approximation raiſonnable; pour la diſtinguer de la probabilité & de la certitude géométriques, on les nomme *phyſiques*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements naturels à la détermination deſquels la volonté humaine n'a aucunement participé; & *morales*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements réſultants des actes de la volonté des hommes.

## CLXV.

Enfin les obſervations & expériences peuvent ſervir à trouver la probabilité des aſſertions ou propoſitions générales & particulieres, ainſi que des opinions & ſyſtêmes, par la comparaiſon des faits qui ſemblent les confirmer avec ceux qui paroiſſent y contredire: & l'on ne doit pas déſeſpérer qu'au défaut des certitudes qui peut-être ne ſeront jamais données aux hommes, un nombre ſuffiſant d'expériences & d'obſervations joint à l'uſage judicieux que le génie en ſaura faire, ne puiſſent aſſujettir un jour la plupart des objets douteux des connoiſſances humaines, à une critique univerſelle & un genre de preuves unique, qui fixeroit ſur chaque opinion un degré d'aſſentiment uniforme, proportionné au degré de probabilité qui lui auroit été aſſigné.

# CHAPITRE VII.

## *De l'influence des Témoignages ſur les Probabilités.*

### §. CLXVI.

IL EST une troiſieme maniere d'évaluer la probabilité des faits ou des propoſitions, laquelle eſt fort en uſage dans le commerce ordinaire de la vie: c'eſt de les déduire de la valeur des témoignages par leſquels ces faits ſont affirmés ou niés. Or la force des témoignages tient non-ſeulement au nombre des témoins, mais à l'intégrité & aux lumieres de chacun d'eux: de maniere que la quantité ou valeur de ces qualités morales doit d'abord être exprimée dans le calcul, ſi l'on veut apprécier avec quelque juſteſſe le degré de probabilité réſultant d'un concours de témoignages. Nous allons eſſayer d'aſſigner briévement quelques-uns des principes qui nous ont ſemblé pouvoir ſervir de baſe à cette Théorie que nous n'oſerions garantir de toutes objections, & dont l'application peut paroître délicate.

### CLXVII.

L'EXPÉRIENCE peut ſeule nous mettre à portée d'apprécier l'intenſité de lumieres & de droiture d'un témoin qui atteſte un fait ou qui le nie; en conſéquence la probabilité de la véracité d'un témoignage rendu en une circonſtance donnée, ne peut guere ſe déduire que de la comparaiſon faite d'un grand

nombre de témoignages rendus par le même témoin, ou par d'autres ayant à-peu-près les mêmes paſſions, préjugés, habitudes, intérêts & lumieres; & dans des circonſtances à-peu-près ſemblables, ainſi qu'il a été expliqué ci-deſſus ( CLXIII. ). Je ſuppoſe donc qu'en un nombre $a$ de ces obſervations, le témoignage a été reconnu pour véritable un nombre de fois $b$, & qu'il a été reconnu pour faux dans toutes les autres; on pourra exprimer par $\frac{b}{a}$ la valeur du témoignage, c'eſt-à-dire, la probabilité qu'il eſt véritable.

## CLXVIII.

On appelle *Poids*, ou *Valeur*, ou *Force* d'un témoignage, la quantité de ſon influence dans la probabilité du fait qu'il affirme; de même, le poids de pluſieurs témoignages réunis, eſt l'influence réſultante de cette réunion dans la probabilité du fait affirmé par tous ces témoignages.

## CLXIX.

Le poids d'un témoignage qui affirme un fait eſt proportionnel à la probabilité de ce témoignage, & peut toujours être exprimé par cette probabilité. Ainſi ſi la fraction $\frac{b}{a}$ eſt la probabilité du témoignage, $\frac{a}{b}$ exprimera le poids de ce même témoignage.

## CLXX.

On nomme *irréprochable*, le témoignage dont le poids eſt le plus grand poſſible; c'eſt-à-dire, celui dont la probabilité eſt 1; on peut auſſi le définir, celui qui eſt le plus capable de rendre certain le fait qu'il affirme, en ſuppoſant que ce fait ne ſoit pas reconnu d'ailleurs pour impoſſible, & que ce té-

moignage ne ſoit contredit par aucun autre témoignage.

## CLXXI.

LORSQUE deux témoignages affirment un fait, le ſecond ajoute au poids du premier une partie de ce qui lui manque pour être irréprochable, proportionnelle au poids du ſecond; ou ce qui eſt de même, le ſecond ajoute au poids du premier la partie de ce qui lui manque pour valoir 1, exprimée par le poids du ſecond; ainſi $\frac{b}{a}$ étant le poids du premier témoignage, $\frac{d}{c}$ le poids du 2e, le poids des deux témoignages réunis ſera $\frac{b}{a} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{d}{c}$; ou $\frac{d}{c} + \left(1 - \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{b}{a}$.

## CLXXII.

LORSQUE trois témoignages affirment un fait, le 3e. ajoute au poids des 2 autres réunis la partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité exprimée par le poids du 3e. Par exemple, ſi les poids des 3 témoignages ſont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$; le poids des trois témoignages réunis ſera $\frac{b}{a} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{d}{c} + \left(1 - \frac{b}{a} - \left\{1 - \frac{b}{a}\right\} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{g}{f}$; ainſi de ſuite, & en général:

Un nouveau témoignage qui affirme un fait, ajoute au poids de tous les autres témoignages réunis la partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité exprimée par le poids du nouveau témoignage.

Ainſi ſi $A$ eſt le poids des autres témoignages réunis, & $\frac{q}{p}$ le poids du dernier témoignage; le

poids de tous les témoignages réunis ſera, $A + (1 - A) \cdot \frac{q}{p}$.

## CLXXIII.

De même quand pluſieurs témoignages nient un fait, chacun de ces témoignages ajoute au poids des autres réunis dans la probabilité que ce fait n'exiſte pas, la partie de ce qui manque à ce poids pour valoir l'unité exprimée par le poids de ce témoignage; ainſi ſi B eſt le poids de tous les autres témoignages niants, & $\frac{y}{x}$ le poids du dernier témoignage; le poids de tous les témoignages réunis dans la probabilité que le fait n'exiſte pas, eſt $B + (1 - B) \cdot \frac{y}{x}$.

## CLXXIV.

Si l'un des témoignages affirmants eſt irréprochable, les autres ne peuvent rien ajouter à ſon poids, qui eſt le plus grand qu'un nombre quelconque de témoignages réunis puiſſe avoir; de même ſi l'un des témoignages eſt irréprochable, les autres témoignages niants ne peuvent rien ajouter à ſon poids, dans la probabilité que le fait nié n'exiſte pas, parce que ce poids eſt le plus grand poſſible.

## CLXXV.

Par la même raiſon, ſi l'un des témoignages affirmants n'eſt d'aucun poids; c'eſt-à-dire, ſi ſa probabilité eſt égale à 0; il n'ajoutera rien au poids des témoignages affirmants; & un des témoignages niants dont le poids ſeroit nul, n'ajouteroit rien au poids des autres témoignages niants.

## CLXXVI.

Lorsque pluſieurs témoignages affirment un

fait, & que pluſieurs autres témoignages nient le même fait, le poids réſultant de la réunion de ces témoignages contradictoires, eſt l'excès du poids des témoignages affirmants ſur le poids des témoignages niants ; ou bien l'excès du poids des témoignages niants ſur celui des témoignages affirmants: ainſi nommant $A$ le poids des témoignages affirmants, $B$ le poids des témoignages niants ; le poids réſultant de tous ces témoignages de part & d'autre eſt $A-B$, ou $B-A$, ou $o$ ſelon que $A>B$ ou que $A<B$ ou que $A=B$.

## CLXXVII.

Si le poids des témoignages qui affirment un fait, eſt plus grand que le poids des témoignages qui nient ce même fait ; l'excès du premier poids ſur le ſecond, ou ce qui eſt de même, le poids réſultant de tous les témoignages pour & contre, augmente la probabilité de l'exiſtence du fait : ſi au contraire le poids des témoignages niants l'emporte ſur le poids des témoignages affirmants ; le poids réſultant des témoignages pour & contre, augmente la probabilité de la non-exiſtence du fait atteſté : enfin ſi le poids des témoignages affirmants eſt égal au poids des témoignages niants, le fait eſt réduit à ſa probabilité propre ; c'eſt-à-dire, à celle qui peut lui être aſſignée indépendamment des témoignages.

## CLXXVIII.

Lorsqu'un fait atteſté à un degré de probabilité qui lui a été aſſigné par l'analyſe ou l'expérience indépendamment des témoignages ; les témoignages rendus pour ou contre ce fait, ajoutent à ſa probabilité propre la partie de ce qui lui manque pour valoir la certitude, exprimée par l'excès du

oids des témoignages affirmants ſur le poids des émoignages qui le nient.

## CLXXIX.

*Théorême I.* Si pluſieurs témoignages dont es probabilités ſont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{i}{h}$, &c. affirment un fait : le poids de ces témoignages réunis ſt l'unité moins le produit des quantités $1-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, $1-\frac{g}{f}$, $1-\frac{i}{h}$, &c. c'eſt-à-dire, $1-(1-\frac{b}{a})\cdot(1-\frac{d}{c})\cdot(1-\frac{g}{f})\cdot(1-\frac{i}{h})\ldots\ldots$

*Dém.* Le poids du premier témoignage eſt $\frac{b}{a}$ (CLXIX.) $=1-(1-\frac{b}{a})$.

Le poids des deux premiers témoignages eſt $\frac{b}{a}+(1-\frac{b}{a})\cdot\frac{d}{c}$ (CLXXI.) $=1-(1-\frac{b}{a})+(1-\frac{b}{a})\cdot\frac{d}{c}=1-(1-\frac{b}{a})\cdot(1-\frac{d}{c})$.

Le poids des trois premiers témoignages eſt $\frac{b}{a}+\left[1-\frac{b}{a}\right]\frac{d}{c}+\left\{1-\frac{b}{a}-\left[1-\frac{b}{a}\right]\cdot\frac{d}{c}\right\}\cdot\frac{g}{f}$ (CLXXII.) $=1-\left[1-\frac{b}{a}\right]\cdot\left[1-\frac{d}{c}\right]\cdot\left[1-\frac{g}{f}\right]$; ainſi de ſuite : donc, &c. *C. Q. F. D.*

## CLXXX.

*Coroll. I.* Si pluſieurs témoignages dont les probabilités ſont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient un fait; e poids de ces témoignages réunis dans la probabilité de la non-exiſtence du fait eſt $1-\{1-\frac{q}{p}\}\cdot\{1-\frac{s}{r}\}\cdot\{1-\frac{u}{t}\}\ldots\ldots$

## CLXXXI.

*Coroll. II.* Si pluſieurs témoignages dont les

probabilités ſont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, &c. affirment un fait, & que pluſieurs autres témoignages dont les probabilités ſont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient ce même fait : nommant $A$ le produit $(1-\frac{b}{a})\cdot(1-\frac{d}{c})\cdot(1-\frac{g}{f})\ldots\ldots$, & $B$, le produit $(1-\frac{q}{p})\cdot(1-\frac{s}{r})\cdot(1-\frac{u}{t})\ldots\ldots$ : Le poids de ces témoignages contradictoires ſera $1-A-1+B$, ou $B-A$, ſi $B>A$; & ce poids augmentera la probabilité propre du fait : Au contraire, le poids de ces témoignages ſera $1-B-1+A$, ou $A-B$, ſi $B<A$, & ce poids augmentera la probabilité de la non-exiſtence du fait : enfin ſi $A=B$, le poids des témoignages ſera nul, & ne pourra augmenter ni diminuer la probabilité propre du fait. (CLXXVI.).

## CLXXXII.

*REMARQUE.* On voit par les formules trouvées aux trois propoſitions précédentes; 1°. que la fraction repréſentée par $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ eſt d'autant plus petite & par conſéquent le poids des témoignages $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ d'autant plus grand que les témoignages particuliers $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ ont plus de probabilité ou de poids & ſont en plus grand nombre; 2°. que ſi quelqu'un de ces témoignages eſt de nulle valeur, c'eſt-à-dire, ſi ſon poids eſt égal à 0, il n'ajoute & n'ôte rien aux poids des autres; 3°. que ſi entre les témoignages affirmants, un ou pluſieurs ſont irréprochables, on a $A=0$, & le poids des témoignages dans la probabilité de l'exiſtence du fait ſera $B$; 4°. que ſi entre les témoignages niants, un ou pluſieurs ſont irréprochables, on a $B=0$, & le poids des té-

oignages dans la probabilité de la non-exiſtence
i fait ſera $A$. 5°. Enfin, que ſi un ou pluſieurs
entre les témoignages affirmants ſont irrépro-
tables, & que un ou pluſieurs des témoignages
ants le ſoient auſſi; on a $A=B=0$; & le fait
teſté ſe trouve réduit à ſa probabilité propre; c'eſt-
dire, à celle qui peut lui être aſſignée indépen-
mment des témoignages.

## CLXXXIII.

Lorsqu'on a aſſigné à un fait un degré de pro-
bilité fondé ſur l'analyſe ou les expériences &
dépendant des témoignages; les témoignages
i affirment ce fait, ou l'excès du poids de ceux
i l'affirment ſur le poids de ceux qui le nient,
gmentent ſa probabilité propre d'une partie de
qui lui manque pour valoir l'unité; & cette par-
augmentée eſt proportionnelle non-ſeulement
poids des témoignages, ainſi qu'il a déjà
obſervé (CLXXVIII.), mais auſſi au degré de
obabilité propre de ce fait. Ce principe tient à
différence d'aſſentiment que nous donnons natu-
lement au même témoin, qui eſt toujours pro-
rtionnelle à la probabilité ou vraiſemblance que
us avons aſſignés par nous-mêmes au fait atteſté.
r effet je croirois beaucoup plus à celui qui vien-
oit m'annoncer, que dans 30 jets de deux dés à
ier il n'a amené qu'une fois ſonnet, que je ne croi-
is au même homme s'il m'annonçoit, que dans
ıt jets de ces deux dés il a amené ſonnet à tous
ups, & le degré de perſuaſion reſtant au témoigna-
ſeroit en proportion du degré de probabilité du
t affirmé.

## CLXXXIV.

Il suit de ce principe que le degré de proba-

bilité ajouté par des témoignages à la probabilité propre d'un fait est en raison composée 1°. De la différence de l'unité à la probabilité propre du fait attesté, 2°. Du poids des témoignages qui affirment le fait, ou de l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient, 3°. De la probabilité propre du fait.

## CLXXXV.

*THÉORÈME II.* Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & $P$ l'excès des poids des témoignages qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient : je dis que la probabilité du fait devient par ces témoignages égale à $1-(1-\frac{n}{m})\cdot(1-\frac{n}{m}P)$.

*DÉMONST.* Suivant la proposition précédente les témoignages ajoutent à la probabilité propre du fait le degré de probabilité exprimé par $(1-\frac{n}{m})\cdot P\cdot\frac{n}{m}$; donc la probabilité de ce fait après les témoignages, est $\frac{n}{m}+(1-\frac{n}{m})\cdot P\cdot\frac{n}{m}=1-(1-\frac{n}{m})\cdot(1-\frac{n}{m}\cdot P)$. *C. Q. F. D.*

## CLXXXVI.

SI LE POIDS des témoignages est nul, c'est-à-dire, si $P=0$; la formule ci-dessus devient $1-(1-\frac{n}{m})$ ou $\frac{n}{m}$; ou ce qui est de même, le fait est réduit à sa probabilité propre : si au contraire $P=1$, la probabilité du fait deviendra $1-(1-\frac{n}{m})^2$; d'où il suit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne suffisent pas pour rendre absolument certain un fait qui ne l'est pas par lui-même, & indépendamment des témoignages.

## CLXXXVIII.

Si le fait eſt certain par lui-même, ſa probabilité propre $\frac{1}{1}=1$, & ne peut ſe réduire à $\frac{1}{2}$, quelque ſoit le contraire $\frac{n}{n}=1$, & ne peut ſe réduire à $\frac{1}{2}$, quelque ſoit la valeur de $n$; & quelque ſoit le nombre quelconque de témoignages, ſimples, ne peut donner à un fait qui par lui-même eſt certain plus de certitude.

## CLXXXIX.

*Théorème III.* Nommant $\frac{1}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & $Q$ le poids de tous les témoignages qui l'établiſſent, la probabilité du fait devient, après ces témoignages, $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\cdot Q\right)$.

*Démonst.* Suivant la propoſition CLXXXVI, les témoignages ajoutent à la probabilité de la non-exiſtence du fait, abſtraction faite de la probabilité propre, $\frac{1}{n}\cdot Q$; & ajoutant la probabilité propre de la non-exiſtence du fait, $\frac{n-1}{n}$, la probabilité de la non-exiſtence du fait, après les témoignages, $\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}Q$; & par conſéquent, ſuivant la probabilité du fait, elle devient $1-\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}Q=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}Q\right)$. C. Q. F. D.

## CLXXXIX.

Si le poids des témoignages eſt nul, c'eſt-à-dire, ſi $Q=0$, la formule ci-deſſus ſe réduira à $\frac{n}{m}$, &

le fait ſera réduit à ſa probabilité propre ; ſi $Q = 1$, cette formule deviendra $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 + \frac{n}{m}\right] = 1 - 1 + \frac{n^2}{m^2} = \frac{n^2}{m^2}$ ; d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne peut anéantir entiérement la probabilité propre d'un fait qui n'eſt pas abſolument impoſſible.

## CXC.

Si $\frac{n}{m} = 0$ ; cette formule deviendra 0 ; Si $\frac{n}{m} = 1$, elle devient 1, d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages qui nient un fait, fuſſent-ils irréprochables, ne peut diminuer la certitude acquiſe à ce fait par l'analyſe ou l'expérience.

## CXCI.

NOMMANT toujours $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un fait indépendante des témoignages ; de plus repréſentant par $1 - A$ le poids des témoignages qui affirment ce fait, & par $1 - B$ le poids des témoignages qui le nient ; la probabilité du fait après les témoignages tels qu'ils ſoient, ſera toujours $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 - \frac{n}{m} \cdot \overline{A - B}\right]$ ; car $B - A$ ſera l'excès du poids des témoignages affirmants ſur le poids des témoignages niants ; & $A - B$ ſera l'excès du poids des témoignages niants ſur celui des témoignages affirmants : ſubſtituant donc $B - A$ à $P$ dans la formule $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 - \frac{n}{m} \cdot P\right]$ trouvée par le théorême 2^e^, cette formule devient $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 - \frac{n}{m} \cdot \overline{B - A}\right]$.

De même, ſubſtituant $A - B$ à $Q$ dans la formule

$1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot Q\right]$ du théorême 3e. cette formule devient encore $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot\overline{A-B}\right]$ qui eſt égale à $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot\overline{B-A}\right]$.

## CXCII.

Il ſuit des propoſitions (CLXXXVI. & CLXXXIX.), que la fraction $\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$ eſt en même temps la plus grande augmentation poſſible que les témoignages qui affirment un fait puiſſent ajouter à la probabilité propre $\frac{n}{m}$ de ce fait, & la plus grande diminution que cette même probabilité puiſſe ſouffrir des témoignages qui le nient; car nommant $x$ la plus grande augmentation poſſible de cette probabilité, on a $\frac{n}{m}+x=1-\left[1-\frac{n}{m}\right]^2=1-1+2\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}$, d'où l'on tire $x=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

De même nommant $y$ la plus grande diminution poſſible de cette même probabilité, on a $\frac{n}{m}-y=\frac{n^2}{m^2}$; donc $y=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

## CXCIII.

Les 2 propoſitions qui viennent d'être citées, font connoître que tous les témoignages poſſibles pour ou contre un fait ſont inſuffiſants pour établir à ce fait une probabilité exacte, lorſqu'on n'a d'ailleurs aucune voie d'analyſe ni d'expériences pour donner à ce fait un degré de probabilité qui lui ſoit propre: ce qui eſt évident; puiſque des témoigna-

ges même irréprochables ne ſuffiſent, ni pour rendre entiérement certain un fait même très-probable; ni pour établir l'impoſſibilité abſolue d'un fait qui n'a qu'une très-petite probabilité.

## CXCIV.

Il ſuit delà, qu'en ſuppoſant qu'on ne puiſſe aſſigner à un fait un degré de probabilité qui lui ſoit propre, on tomberoit dans l'erreur de prendre pour probabilité de ce fait, ou le poids des témoignages qui l'affirment, ou l'excès du poids de ceux qui l'affirment ſur le poids de ceux qui le nient : un ſeul exemple ſuffira pour s'en convaincre. Je ſuppoſe qu'un fait de cette eſpece eſt affirmé par des témoignages dont le poids eſt $\frac{2}{3}$ & nié par des témoignages dont le poids eſt $\frac{1}{3}$ ; ſi l'on prenoit $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ pour la probabilité du fait ; $1 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ ſeroit la probabilité que le fait n'exiſte pas ; par quoi les probabilités des faits contradictoires affirmés ſe trouveroient en raiſon inverſe des poids des témoignages qui les affirment : ce qui eſt manifeſtement abſurde : cette remarque fait connoître ſenſiblement l'inſuffiſance des autorités pour fonder des conjectures ſur des faits, dont la raiſon, ni l'expérience ne donnent aucun moyen d'examiner la nature, & dont nous ne ſommes pas en état d'apprécier la probabilité indépendamment de ces autorités.

## CXCV.

L'INFLUENCE qui vient d'être aſſignée aux témoignages ſur la probabilité des faits atteſtés, ſuppoſe que le témoin prétend avoir vérifié par lui-

même, & tenir pour certain le fait qu'il affirme; mais ſi ce fait n'eſt que probable pour celui qui me l'annonce; comme dans le cas où il l'auroit lui-même appris d'un autre témoin; alors la probabilité que le témoignage donne au fait atteſté eſt compoſée de la probabilité du témoignage qui me l'annonce & de celle du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là. Suppoſant donc que $\frac{n}{m}$ eſt la probabilité propre du fait; $\frac{b}{a}$ le poids du témoignage qui me l'annonce; $\frac{d}{c}$ le poids du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là; la probabilité du fait deviendra par ces témoignages, $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m}$ a, $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$;

Et ſi le témoin antérieur, au lieu de donner ſon témoignage comme directement certifié, l'a reçu lui-même d'un troiſieme témoin dont le poids eſt $\frac{g}{f}$; la probabilité du fait deviendra $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{g}{f}$, Ainſi de ſuite.

## CXCVI.

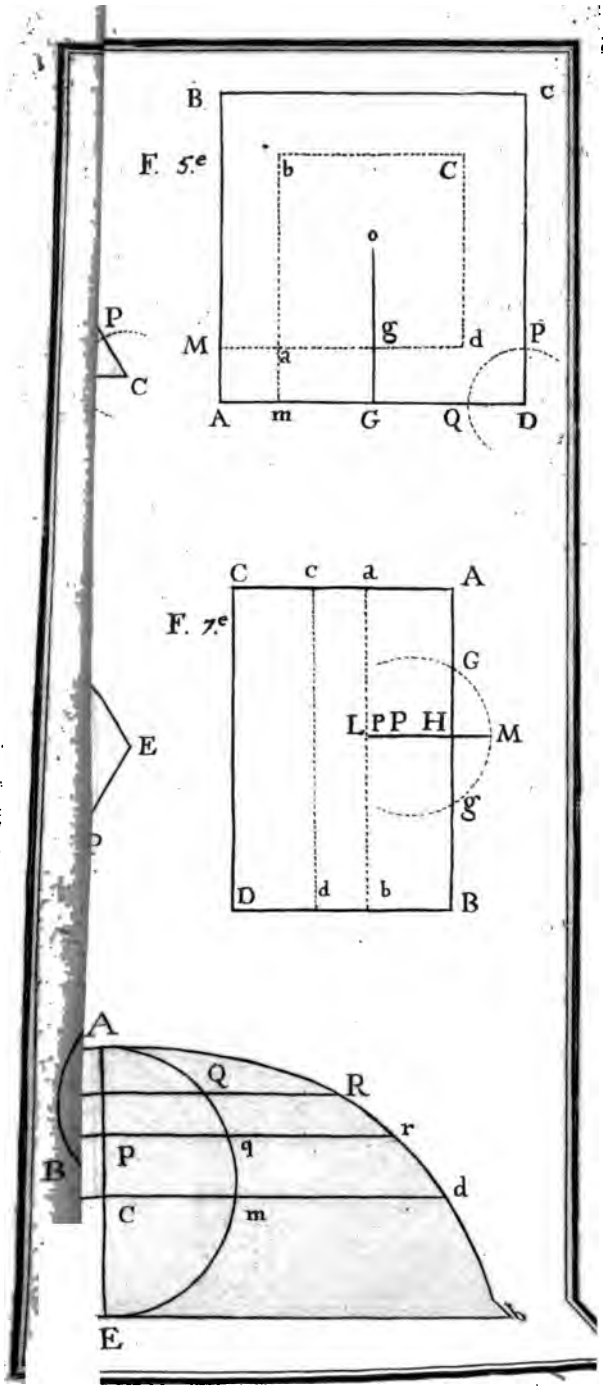
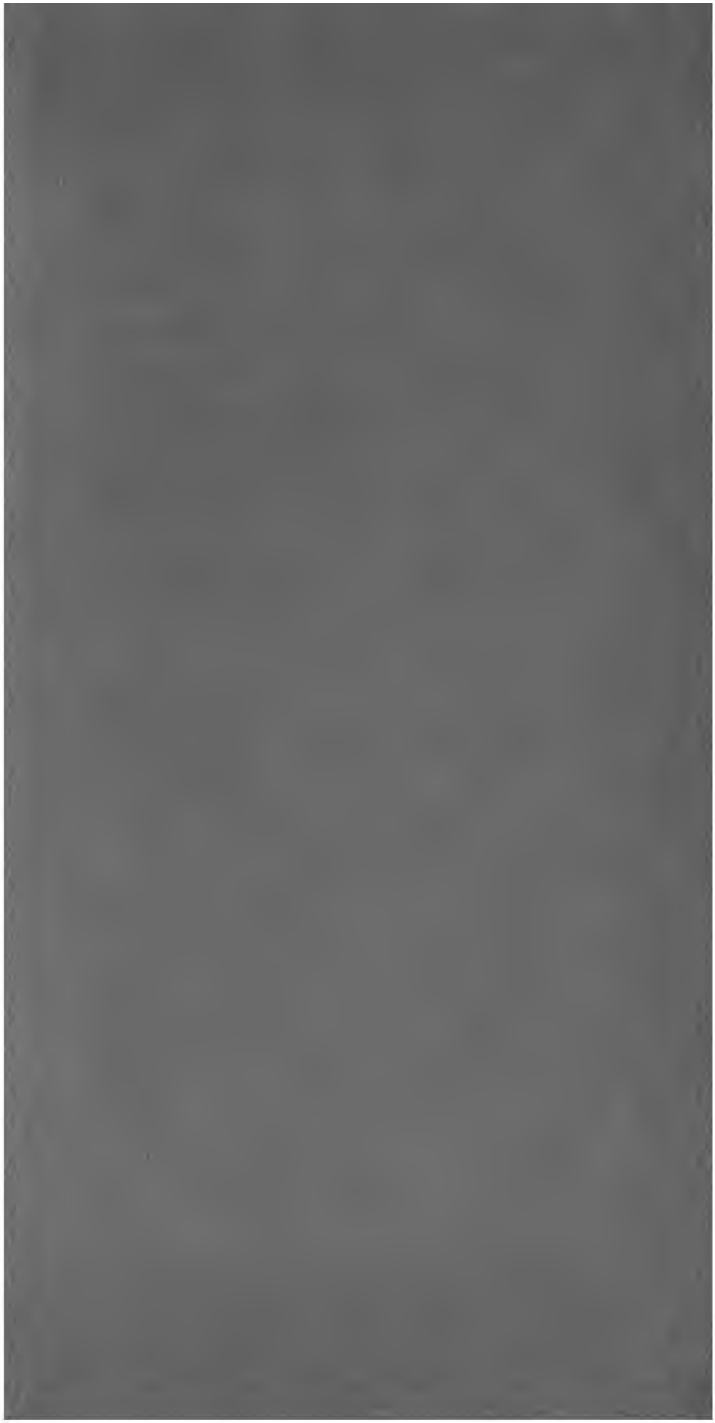
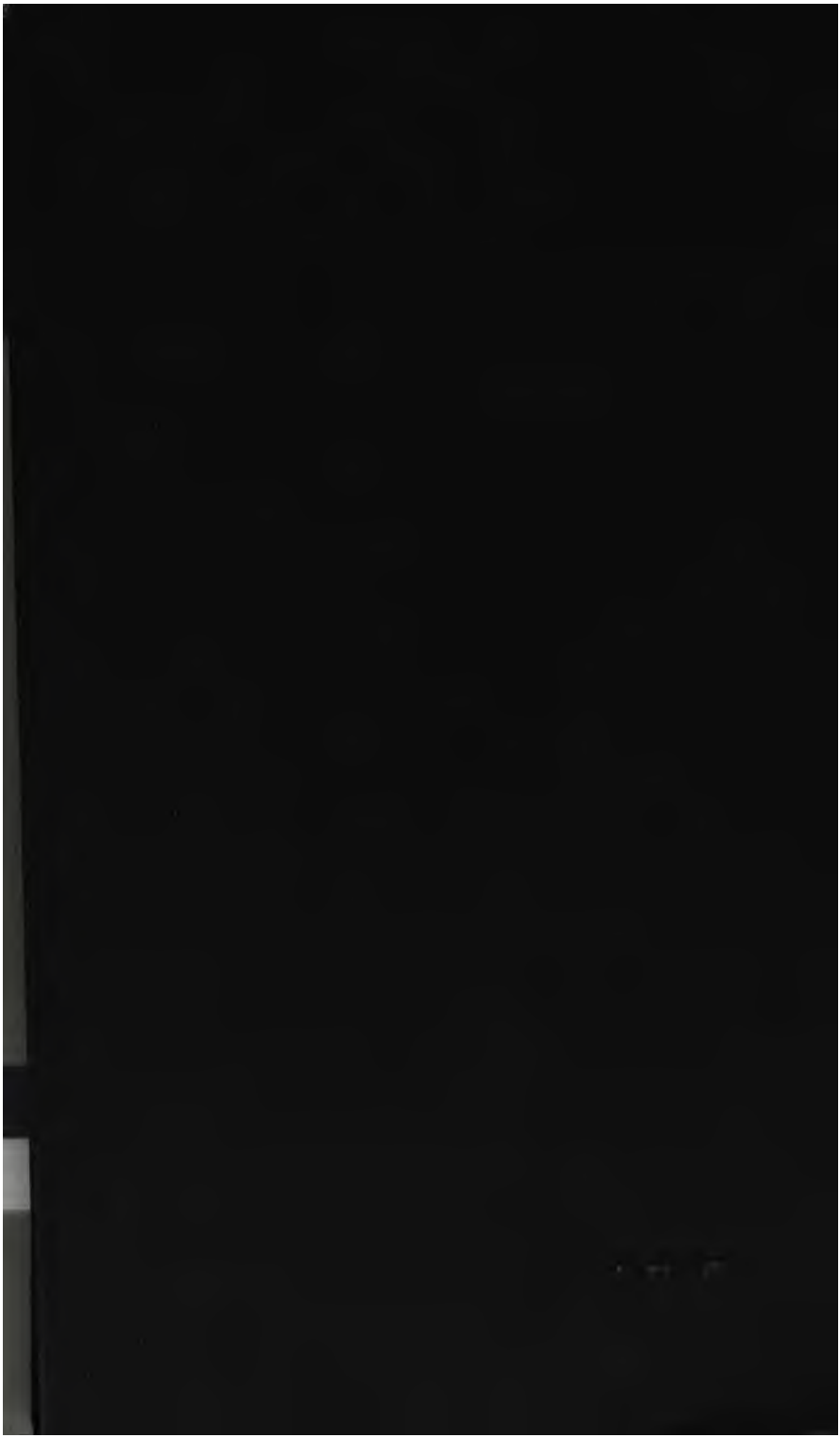
Un témoignage rendu en conſéquence d'un autre témoignage que j'ai reçu moi-même directement n'ajoute rien pour moi au poids de ce témoignage que j'ai reçu; ainſi lorſqu'un fait m'a été affirmé par Pierre; Paul qui a reçu le même témoignage de Pierre, n'ajoute rien en me le rapportant à l'influence du témoignage de Pierre ſur la probabilité que j'ai du fait.

## CXCVII.

Un témoignage authentiquement conſigné dans un écrit, conſerve la probabilité qu'il avoit dans

l'origine lorſqu'il a été oralement rendu par le témoin ; & il la conſerve autant de temps que l'authenticité de l'écrit reſte certaine ; mais lorſque cette authenticité n'eſt plus que probable, le poids du témoignage, pour être évalué juſte, doit ſe multiplier par la probabilité de l'authenticité de l'écrit dans lequel il eſt conſigné.

FIN.


F. 5.e
B
C
b
C
o
P
M
g
d
P
C
a
A
m
G
Q
D
F. 7.e
C
c
a
A
G
L
P
P
H
M
E
g
D
d
b
B
A
Q
R
r
B
P
q
d
C
m
E